Tutorium zur Ana III am 20.01.21

Nochmal zur Transformationsformel

$$\int_{T(\Omega)} f(y)\,dy = \int_\Omega \underbrace{\ }_{f(T(x))} |\det DT(x)|\,dx ,$$

diesmal mit Aufgaben für Sie.

Betrachten möchte ich die Abbildung

$$T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto T(z) = z^2$$

unter dem Aspekt, wie wir diese für Integralberechnungen mit der Transformationsformel nutzen können. Dazu müssen wir uns ein wenig mit den analytischen und elementargeometrischen Eigenschaften von T beschäftigen.

Aufg. 1: Geben Sie T in reellen kartesischen Koordinaten an, d.h. finden Sie eine Darstellung

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (x_1, x_2) \mapsto T(x_1, x_2) = (T_1(x_1, x_2), T_2(x_1, x_2)) =: (y_1, y_2).$$

Berechnen Sie hierfür die Jacobi-Matrix $DT(x_1, x_2)$ und deren Determinante.

Geben Sie auch eine Darstellung von T mit Hilfe ebener Polarkoordinaten an!

Aufg. 2: Bestimmen Sie das Bild (unter T)

(a) der Geraden $G^a := \{(a, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ und beschreiben Sie $T(G^a)$ geometrisch. Wohin werden dabei für $a > 0$ die Bereiche

$H^{>a} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > a\}$ und $S^{<a} := \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a\}$

abgebildet?

(b) der Geraden $G_b := \{(x_1, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Was ist für $b > 0$ $T(H_{>b})$ bzw. $T(S_{<b})$, wobei

$H_{>b} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > b\}$ und $S_{<b} := \{(x_1, x_2) : 0 < x_2 < b\}$?

Tipp. $G_a = i G^a$.

(c) der Halbgeraden $H_\varphi := \{r \cdot e^{i\varphi} : r > 0\}$ bzw. der Sektoren $S_\varphi := \{r e^{it} : r > 0,\ 0 < t < \varphi\}$ $(0 < \varphi < 2\pi)$,

(d) der Kreise $K_R := \{R e^{i\varphi} : \varphi \in \mathbb{R}\}$ um den Nullpunkt. Wohin werden dabei das Kreisinnere bzw. das Kreisäußere abgebildet? Gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die Einschränkung

$$T\big|_{B_\varepsilon(0)} : B_\varepsilon(0) \longrightarrow T(B_\varepsilon(0))$$

(i) ein C^1-Diffeomorphismus oder

(ii) bijektiv ist?

Dann, nachdem wir die Lösungen zu A1 und A2 gesehen haben, kommen wir tatsächlich auch zu einer Integrationsaufgabe:

Aufgabe 3: Berechnen Sie

(a) den Flächeninhalt von

$$P_b^a := \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y_2^2}{4b^2} - b^2 < y_1 < a^2 - \frac{y_2^2}{4a^2} \},$$

das ist der Durchschnitt zweier Parabel-inneren, und

(b) das Integral

$$\int_{\Omega'} \frac{|y_2|}{(y_1^2 + y_2^2)^2} \, dy ,$$

wobei $\Omega' := \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 > a^2 - \frac{y_2^2}{4a^2} \}$.

(Das ist das Äußere einer Parabel.)