Zur Transformationsformel, Tutorium am 13.01.21

insbes. zum Begriff des C^1-Diffeomorphismus; (1)

Anwendung: Toruskoordinaten

Aus der Vorl.: Transformationsformel für C^1-Diffeomorphismen

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T: \Omega \to \Omega'$ ein C^1-Diffeomorphismus und $f: \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega', \mathcal{L}_{\Omega'}, \lambda_n)$ g.d.w. $|\det DT|\, f \circ T \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{L}_\Omega, \lambda_n)$.
In diesem Fall gilt

$$\int_{\Omega'} f(y)\, d\lambda_n(y) = \int_{\Omega} f(T(x))\, |\det DT(x)|\, d\lambda_n(x).$$

C^1-Diffeomorphismus: stetig differenzierbar mit ebenfalls stetig differenzierbarer Inverser $T^{-1}: \Omega' \to \Omega$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \supset \underset{\text{offen}}{\Omega} \arrow[r, shift left, "T"] \arrow[dr, "f\circ T"'] & \Omega' \subset \mathbb{R}^n \text{ offen} \arrow[l, shift left, "T^{-1}"] \arrow[d, "f"] \\
 & \overline{\mathbb{R}}
\end{tikzcd}$$

Anwendung (ebenfalls aus der Vorl.): n-dim. Kugelkoordinaten: ②

Mit $B_R(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < R\}$, $B = \{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi'| < 1\}$ und $\xi_n = \sqrt{1-|\xi'|^2}$ gilt:

$$\int_{B_R(0)} f(y)\, d\lambda_n(y) = \int_{(0,R)\times B} \left(f(r\xi', r\xi_n) + f(r\xi', -r\xi_n)\right) \frac{r^{n-1}}{\xi_n}\, d\lambda_n(r,\xi')$$

Wenn klar ist, dass man nach dem Lebesgue-Maß integriert, schreibt man dy (statt $d\lambda_n(y)$) und $d(r,\xi')$ statt $d\lambda_n(r,\xi')$. $(T^{\pm}(r,\xi') = r(\xi', \pm\xi_n))$

zum Bew. verwendete Transformation

Konkret: <u>2-dim. Polarkoordinaten</u>

Für $n=2$ geht die obige Formel durch die Substitution $\xi = \cos\varphi$ mit $\varphi \in (0,2\pi)$ über in

$$\int_{B_R(0)} f(y)\,dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi\, r\, dr. \qquad (*)$$

Wie würde man $(*)$ direkt aus der Transformationsformel gewinnen? Welche Transformation T ist hierfür geeignet?

bzw.: Welcher C^1-Diffeomorphismus T

Aus Ana I ist bekannt: Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass mit $r = |z|$ gilt

$$z = r \cdot e^{i\varphi}.$$

Übersetzung ins Reelle: Zu jedem $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gibt es genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ gilt

$$(x, y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$$

Das bedeutet: Die Abbildung

$$T_0 : (0,\infty) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$
$$(r, \varphi) \longmapsto T_0(r, \varphi) := r(\cos\varphi, \sin\varphi)$$

ist bijektiv. T_0 ist überdies stetig differenzierbar (sogar C^∞), aber <u>kein</u> <u>Diffeomorphismus</u>, denn

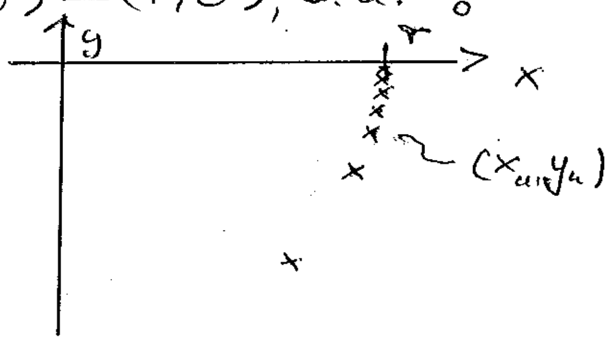
$$T_0^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow (0,\infty) \times [0, 2\pi)$$

ist <u>nicht stetig</u>!

<u>Bsp.</u>: $(x_n, y_n) = r\left(\cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (r, 0)$

<u>aber</u> $T_0^{-1}(x_n, y_n) = \left(r, 2\pi - \frac{1}{n}\right) \longrightarrow (r, 2\pi) \notin \mathcal{D}(T_0)$

während ~~[illegible]~~ $T_0^{-1}(r, 0) = (r, 0)$, d.h. T_0^{-1} ist unstetig in $(r, 0)$ für jedes $r > 0$, also für $\varphi = 0$, auf der Bildseite also auf der positiven x-Achse



Naheliegender Ausweg: Wir nehmen $(0,\infty)\times\{0\}$ aus dem Definitionsbereich aus und betrachten

$$T:(0,\infty)\times(0,2\pi)\longrightarrow\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0):x\geq 0\}=:\mathbb{R}^2\setminus[0,\infty)$$

$$(r,\varphi)\longmapsto T(r,\varphi)=r(\cos\varphi,\sin\varphi)$$

Dann ist T bijektiv und stetig differenzierbar.

Frage: Ist T^{-1} ebenfalls C^1?

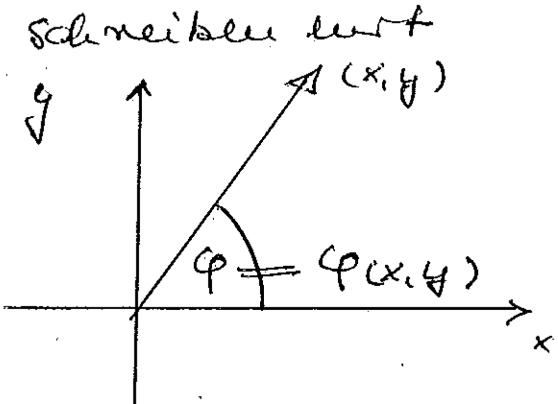
Elementarer Versuch: T^{-1} explizit angeben (und dann die stetige D'barkeit überprüfen), etwa so:

$$x=r\cos\varphi=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\varphi=\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Nun ist $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ bijektiv und die Inverse $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$ ist auf $(-1,1)\to(0,\pi)$ stetig differenzierbar. Man würde also z.B.

$$T^{-1}:\mathbb{R}^2\setminus[0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)\times(0,2\pi)$$
$$(x,y)\longmapsto T^{-1}(x,y):=\left(\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi(x,y)\right)$$

schreiben mit



$$\varphi(x,y):=\begin{cases}\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right); & y>0\\ \pi; & y=0\\ \pi+\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right); & y<0.\end{cases}$$

(Dann bleibt aber noch etwas zu tun, um die D'barkeit insbes. in Punkten $(x,0)$ mit $x<0$ einzusehen.)

Wie kann man solch einen Aufwand vermeiden?

Ana II: <u>Satz über inverse Abbildungen:</u>

! wichtig für das Argument

Sind Ω und $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen und ist $T: \Omega \to \Omega'$ stetig differenzierbar mit $\det \mathcal{D}T(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in \Omega$, so existieren Umgebungen U von x_0 und V von $T(x_0)$, so dass $T|_U : U \to V$ invertierbar ist. <u>In diesem Fall ist $T^{-1}: V \to U$ ebenfalls stetig differenzierbar</u> und es gilt

$$\mathcal{D}T^{-1}(T(x)) = (\mathcal{D}T(x))^{-1}.$$

Da die (lokale) Inverse eindeutig bestimmt ist und wir um die Existenz der globalen Inversen bereits wissen, müssen wir lediglich überprüfen, dass

$$\det \mathcal{D}T(r, \varphi) \neq 0 \qquad \forall (r, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$$

Für $T(r, \varphi) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$ ergibt sich

$$\mathcal{D}T(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

mit $\det \mathcal{D}T(r, \varphi) = r(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = r > 0$.

Die weggenommene Halbgerade $[0, \infty)$ ist eine λ_2-Nullmenge, also können wir die Transformationsformel mit T (wie oben) anwenden und erhalten die Gleichung $(*)$ auf S. 2.

Empfehlung: Vollziehen Sie die vorangehenden Über- ⑥
legungen für die 3-dim. Polarkoordinaten nach,
die mit Winkelvariablen gegeben sind durch

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta$$

$$y = r\sin\varphi\sin\vartheta$$

$$z = r\cos\vartheta.$$

~~Wie~~ Welche Abbildungen hat man: Welche Mengen
muss man ausnehmen, um einen Diffeomor-
phismus zu erhalten? Handelt es sich dabei um
λ_3-Nullmengen? Wenn Sie dabei die Jacobi-
Matrix und ihre Determinante richtig ausge-
rechnet haben, ergibt sich die Gleichung ($n=3$!)

$$\int_{B_R(0)} f(y)\,dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, r^2 dr,$$

die wir in der Vorlesung auf etwas anderem Weg
gezeigt haben, und von der Sie in einer der kom-
menden Ü-Aufgaben Gebrauch machen sollen.

Anwendung: Toruskoordinaten

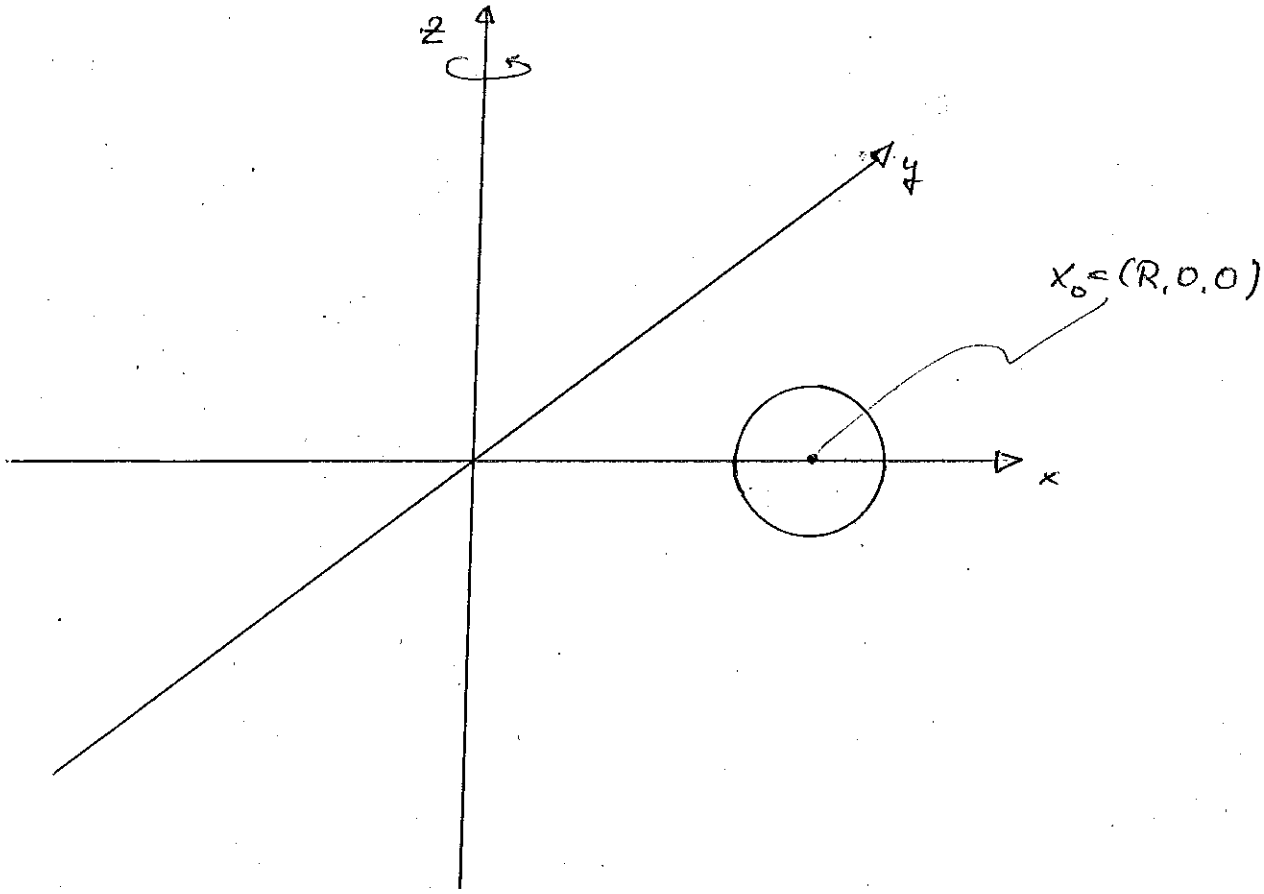
Den Torus

$$T_{r,R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$$

aus Aufg. 6 von Blatt 2 denken wir uns entstanden durch Rotation der Kreisscheibe

$$K = \{(\rho\cos\varphi + R, 0, \rho\sin\varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq r,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

vom Radius r in der x-z-Ebene um den Punkt $x_0 = (R,0,0)$ um die z-Achse.



Eine Drehung um den Winkel ϑ um die z-Achse wird beschrieben durch die Matrix

$$O(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei eine ganze Umdrehung entsteht, wenn ϑ das Intervall $[0, 2\pi)$ durchläuft. Alle Elemente von $\mathbb{T}_{r,R}$ erhalten wir erst

$$T_0(\varrho, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + \varrho\cos\varphi \\ 0 \\ \varrho\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\vartheta(R + \varrho\cos\varphi) \\ \sin\vartheta(R + \varrho\cos\varphi) \\ \varrho\cdot\sin\varphi \end{pmatrix},$$

wobei $0 \leq \varrho \leq r$, $0 \leq \varphi, \vartheta < 2\pi$, und unsere Überlegung zeigt, dass $T_0 : [0, r] \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{T}_{r,R}$ surjektiv ist. Um Injektivität und Offenheit des Definitionsbereiches zu erreichen, definieren wir

$$T: (0, r) \times (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{T}_{r,R}, \quad T(\varrho, \varphi, \vartheta) := T_0(\varrho, \varphi, \vartheta)$$

Dann wird nicht mehr $\mathbb{T}_{r,R}$ vollständig erreicht, aber was fehlt, ist eine Nullmenge (nämlich der Kreis K, den wir gedreht haben und ein Teil der x-y-Ebene.

Für

$$T(\varrho,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\,(R+\varrho\cos\varphi) \\ \sin\vartheta\,(R+\varrho\cos\varphi) \\ \varrho\sin\varphi \end{pmatrix}$$

ist $\quad DT(\varrho,\varphi,\vartheta) =$

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\varrho\sin\varphi\cos\vartheta & -\sin\vartheta\,(R+\varrho\cos\varphi) \\ \sin\vartheta\cos\varphi & -\varrho\sin\varphi\sin\vartheta & \cos\vartheta\,(R+\varrho\cos\varphi) \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung der Determinante entwickeln wir nach der 3. Spalte:

$$-\sin\vartheta\,(R+\varrho\cos\varphi)\,(\varrho\cos^2\varphi\sin\vartheta + \varrho\sin^2\varphi\sin\vartheta)$$

Pythagoras

$$-\cos\vartheta\,(R+\varrho\cos\varphi)\,(\varrho\cos^2\varphi\cos\vartheta + \varrho\sin^2\varphi\cos\vartheta)$$

$$= -(R+\varrho\cos\varphi)\cdot\varrho\,\underbrace{(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)}_{=1} = -\varrho\,(R+\varrho\cos\varphi)$$

Also wegen $R>0$:

$$|\det DT(\varrho,\varphi,\vartheta)| = \varrho\,(R+\varrho\cos\varphi)$$

Damit ergibt sich als Formel für die Integration über den Torus:

$$\int_{T_{r,R}} f(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

$$= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos\vartheta\,(R+\varrho\cos\varphi),\ \sin\vartheta\,(R+\varrho\cos\varphi),\ \varrho\sin\varphi) \cdot (R+\varrho\cos\varphi)\cdot\varrho \, d\vartheta\, d\varphi\, d\varrho \,.$$

Anregung: Bestimmen Sie hiermit das Volumen und die Trägheitsmomente des Torus.