Erinnerung: Konvergenzsätze

Satz v. B. Levi (monotone Konvergenz): Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, f_n : X \to [0, \infty]$ $\mathcal{A}$-messbar, so dass $f_n \nearrow f$ μ-f.ü. Dann gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu .$$

Insbesondere ist f nach μ integrierbar, wenn dieser Grenzwert endlich ist.

Lebesguescher Konvergenzsatz (von der majorisierten Konvergenz): Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ mit $f_n \to f$ μ-f.ü. Ferner existiere eine nach μ integrierbare Funktion $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, so dass $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|f_n| \leq g \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Dann ist auch $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ und es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu .$$

Anwendung des Lebesgue'schen Konvergenzsatzes:

Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Γ-Funktion

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

(1) Stetigkeit in einem Punkt $x_0 > 0$. Um diese zu zeigen, betrachten wir eine Folge $(x_n)_n$ in $(0,\infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann ist zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma(x_n) = \Gamma(x_0)$$

bzw. dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \underbrace{t^{x_n-1} e^{-t}}_{=: f_n(t)} dt = \int_0^\infty \underbrace{t^{x_0-1} e^{-t}}_{=: f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)} dt,$$

letzteres, weil die Funktion $x \mapsto t^x$ stetig ist.

Die punktweise Konvergenz der Folge der Integranden wäre damit bereits geklärt. Wenn wir jetzt noch eine integrierbare Funktion

$$g : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$$

(die "Majorante"!) finden können, so dass

$$|f_n(t)| \underset{\text{hier}}{=} f_n(t) \le g(t) \quad \text{für } \lambda_1\text{-fast alle } t,$$

so erlaubt der Lebesguesche Konvergenzsatz, Integrieren und Grenzwertbildung zu vertauschen, und unsere Aufgabe ist gelöst.

Fall 1: $x_0 \in (0,1]$

Für hinreichend großes n ist $x_n > \frac{x_0}{2}$ und daher

$$f_n(t) = t^{x_n-1}e^{-t} \le \underbrace{t^{\frac{x_0}{2}-1}\cdot\chi_{(0,1)}(t)}_{=:\,g_1(t)} + \underbrace{e^{-t}\cdot\chi_{[1,\infty)}}_{=:\,g_2(t)}$$

Aus Analysis I wissen wir, dass g_1 und g_2 auf $(0,\infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar sind. Da $g_{1,2}(t) \ge 0 \ \forall t > 0$ gilt, wissen wir auch: $g_{1,2}$ sind auf $(0,\infty)$ Lebesgue-integrierbar.

Fall 2: $x_0 \in [1,\infty)$

Für hinreichend großes n: $x_n \ge \frac{1}{2}$ und $x_n \le x_0+1$

$$\Rightarrow f_n(t) = t^{x_n-1}e^{-t} \le \underbrace{t^{-\frac{1}{2}}\chi_{(0,1)}(t)}_{=:\,g_1(t)} + \underbrace{t^{x_0}\cdot e^{-t}\chi_{[0,\infty)}(t)}_{=:\,g_2(t)}$$

Die Integrierbarkeit von g_1 haben wir in Fall 1 bereits geklärt. g_2 schätzen wir weiter ab:

Es gilt $\lim_{t\to\infty} t^{x_0}e^{-t/2} = 0$ und

$$\lim_{t\to 1} t^{x_0} e^{-t/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Da $t \mapsto t^{x_0} e^{-t/2}$ auf $[1,\infty)$ stetig ist, ist diese Funktion auch beschränkt, es existiert also eine Konstante $C = C(x_0) > 0$, so dass

$$t^{x_0} e^{-t/2} \leq C$$

ist und daher

$$t^{x_0} e^{-t} \leq C \cdot e^{-t/2}.$$

Das ist wieder uneigentlich Riemann-integrierbar, ≥ 0 und taugt daher als integrierbare Majorante.

<u>Differenzierbarkeit in $x > 0$:</u>

(2) Beh.: $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \ln(t)^n e^{-t}\,dt$$

<u>Bew.</u> per Induktion über n, für $n=0$ ist nichts zu zeigen.

$\longrightarrow$

Formale Rechnung für den Induktionsschritt $n \to n+1$ (5)

$$\Gamma^{(n+1)}(x) \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{d}{dx} \int_0^\infty t^{x-1} \ln(t)^n e^{-t} dt$$

$$\underset{=}{(\overset{?}{\nabla})} \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x} t^{x-1}\right) \ln(t)^n e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{x-1} \ln(t)^{n+1} e^{-t} dt,$$

letzteres, weil $\frac{\partial}{\partial x} t^{x-1} = \ln(t) \cdot t^{x-1}$.

Es bleibt also die Vertauschung von Integration und Differentiation an der Stelle ($\overset{?}{\nabla}$) zu rechtfertigen, und dabei hilft uns wieder der Satz von der majorisierten Konvergenz. Wir schreiben

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty t^{x-1} \ln(t)^n e^{-t} dt$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\int_0^\infty t^{x+h-1} \ln(t)^n e^{-t} dt - \int_0^\infty t^{x-1} \ln(t) e^{-t} dt \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \cdot \int_0^\infty \frac{t^h - 1}{h} \cdot t^{x-1} \ln(t)^n e^{-t} dt$$

Wenn wir jetzt den $\lim\limits_{h \to 0} \ldots$ „ins Integral ziehen" können, sind wir fertig, denn dann ist

$$\ldots = \int_0^\infty \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{t^h - 1}{h}}_{= \frac{d}{dx} t^x \big|_{x=0} = t^x \cdot \ln(t) \big|_{x=0} = \ln(t)} t^{x-1} \cdot \ln(t)^n \cdot e^{-t} dt.$$

Nun sei $(h_k)_k$ eine Nullfolge, dann ist also zu (6)

zeigen, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \underbrace{\frac{t^{h_k}-1}{h_k}\, t^{x-1}\cdot \ln(t)^n \cdot e^{-t}}_{=: f_k(t)}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{t^{h_k}-1}{h_k}}_{= \ln(t),\text{ so}}\, t^{x-1} \ln(t)^{n+1} e^{-t}}_{=: f(t) = \lim_{k\to\infty} f_k(t)}\, dt$$

Die punktweise Konvergenz ist bereits geklärt, es bleibt also eine integrierbare Majorante für

$$f_k(t) = \frac{t^{h_k}-1}{h_k}\cdot t^{x-1} \ln(t)^n \cdot e^{-t}$$

zu finden.

Fall 1: $0 < x < 1$. Für hinreichend großes k ist $|h_k| \leq \frac{x}{2}$. Den 1. Faktor schätzen wir mit dem MWS ab

$$\frac{t^{h_k}-1}{h_k} = \frac{d}{dx} t^x \Big|_{\xi} = t^{\xi} \cdot \ln(t)$$

mit einem ξ zwischen h_k und 0, also mit $|\xi| \leq \frac{x}{2}$

Dann ist

$$|f_k(t)| \leq t^{\frac{x}{2}-1} \cdot |\ln(t)|^{k+1} \cdot \chi_{(0,1)}(t)$$

$$+ t^{\frac{3x}{2}-1} \cdot \ln(t)^{k+1} e^{-t} \cdot \chi_{[1,\infty)}(t)$$

$$=: g_1(t) + g_2(t)$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$, so dass $t^{\frac{x}{2}-\varepsilon-1}$ noch integrierbar bleibt, also so dass $\frac{x}{2} - \varepsilon > 0$ ist. Dann ist $\lim_{t \to 0} t^{\varepsilon} \cdot |\ln(t)|^{k+1} = 0$ und daher

$$C := \sup \{ t^{\varepsilon} |\ln(t)|^{k+1} : 0 < t \leq 1 \} < \infty.$$

Also $g_1(t) \leq C \cdot t^{\frac{x}{2}-\varepsilon-1} \cdot \chi_{(0,1)}(t)$,

und das ist integrierbar.

Wg. $x \leq 1$ haben wir $g_2(t) \leq C\, t \cdot e^{-t} \chi_{[1,\infty)}(t)$

und auch hiervon ist die Integrierbarkeit bekannt.

<u>Fall</u> 2 $x \geq 1$. Nur das Argument für g_2 ist etwas zu modifizieren: $g_2(t) \leq C \cdot t^{2x} \cdot e^{-t} \chi_{[1,\infty)}(t)$

$$\leq \tilde{C} \cdot e^{-t/2} \chi_{[1,\infty)}(t),$$

wie bei der Stetigkeit

und das ist integrierbar.

(8)

Aufg.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$

Zeigen Sie:

(a) f ist stetig;

(b) f ist differenzierbar,

(c) es gilt $f'(x) = -\frac{x}{2} f(x)$.

Bem.: Die Lösung dieser gewöhnlichen Dgl ist

$$f(x) = C \cdot e^{-x^2/4}$$

nächste Vorlesung

Ferner ist $f(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} = C$.