Noch eine einfache <u>Aufgabe zum Limes superior und Limes inferior von Mengenfolgen:</u>

Tut. am 16.12.20

Erinnerung: Für reelle Zahlenfolgen definiert man

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k \quad \text{und}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k .$$

Gleichwertig: $\limsup_{n\to\infty} a_n$ = größter (ggf. uneigentlicher) Häufungswert der Folge $(a_n)_n$

entsprechend: $\liminf_{n\to\infty} a_n$ = kleinster HW von $(a_n)_n$

Analog dazu definiert man für Mengenfolgen $(A_n)_n$:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \quad \text{und}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k .$$

Die Vereinigung $\bigcup_{k\geq n}$ tritt also an die Stelle des Supremums $\sup_{k\geq n}$, der Durchschnitt $\bigcap_{k\geq n}$ an die Stelle des Infimums $\inf_{k\geq n}$.

Die für Zahlenfolgen anschließende Limesbildung wird durch die jeweils "entgegengesetzte" Mengenoperation ersetzt.

Tut. am 16.12.

Aufg. 1:

(a) $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$

$\Leftrightarrow$ $x \in A_n$ für unendlich viele Indices n

(b) Finden Sie eine ähnliche Charakterisierung

für $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$

(c) $\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c$

(und umgekehrt)

(d) Für $A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$ gilt

$\limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \chi_A$.

Lösung A1:

(a) $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \iff \forall n \in \mathbb{N}: x \in \bigcup_{k\geq n} A_k$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, k = k(n) \geq n$, so dass $x \in A_k$

$\iff x \in A_k$ für unendlich viele Indices k.

(b) $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k \iff \exists\, n_0 = n_0(x)$, so dass $x \in \bigcap_{k\geq n_0} A_k$

$\iff \exists\, n_0 = n_0(x)$, so dass $x \in A_k$ für alle $k \geq n_0$

Letzteres kann man auch in Worte fassen:

$x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ g.d.w. $x \in A_n$ für alle bis auf endlich viele Indizes n.

(c) Das folgt aus den de Morgan'schen Regeln

$$\underbrace{\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k\Big)^c}_{=\ \left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big)^c = \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k^c}_{=\ \liminf_{n\to\infty} A_n^c}$$

(d) Ist $A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$, so gilt

$\limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \chi_A$, denn:

$\sup_{k\geq n} \chi_{A_k}(x) = 1 \iff \exists\, k = k(n) \geq n$, so dass $x \in A_k$

$\iff x \in \bigcup_{k\geq n} A_k \iff \chi_{\bigcup_{k\geq n} A_k}(x) = 1$, d.h.

$$\sup_{k\geq n} \chi_{A_k} = \chi_{\bigcup_{k\geq n} A_k}$$

Noch zu Teil (d) von A1:

Daher ist

$$\limsup_{n\to\infty} A_n(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_{\bigcup_{k\geq n} A_k}(x) = 1$$

$$\overset{(*)}{\iff} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \chi_{\bigcup_{k\geq n} A_k}(x) = 1$$

$$\iff \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : x \in \bigcup_{k\geq n} A_k$$

$$\iff \exists n_0 \in \mathbb{N} : x \in \bigcap_{n\geq n_0} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

$$\overset{(**)}{\iff} x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \iff \chi_A(x) = 1$$

(*) Weil die charakteristische Funktion nur die Werte 0 und 1 annimmt.

(**) Da die Mengenfolge $\bigcup_{k\geq n} A_k$ absteigend ist.