<u>Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$</u>: Gegeben seien

- $f: \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$, stetig, streng monoton steigend und beschränkt, so dass
- eine stetige Inverse $f^{-1}: I \to \mathbb{R}$ und
- die Grenzwerte $f(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} f(x)$ u. $f(\infty) := \lim_{x \to \infty} f(x)$

existieren.

- Metrik: $d_f: \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0, \infty)$, $(x,y) \mapsto d_f(x,y) := |f(x) - f(y)|$

(Die Eigenschaften einer Metrik prüft man leicht nach, lediglich die Injektivität von f ist hierfür erforderlich.)

- τ sei die Standardtopologie (= System offener Mengen) auf $\mathbb{R}$, definiert durch

$$\Omega \in \tau :\Longleftrightarrow \forall x \in \Omega \ \exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \Omega$$

Mit Hilfe von τ haben wir eine <u>Topologie $\overline{\tau}$ auf</u> <u>$\overline{\mathbb{R}}$</u> $= \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ festgelegt durch

- $$\overline{\tau} := \{\Omega, [-\infty, b) \cup \Omega, \Omega \cup (a, \infty], [-\infty, b) \cup \Omega \cup (a, \infty], \ a, b \in \mathbb{R}, \Omega \in \tau\}$$

(Die Eigenschaften einer Topologie: $\emptyset, \overline{\mathbb{R}} \in \overline{\tau}$; $\Omega_{1,2} \in \overline{\tau} \Rightarrow \Omega_1 \cap \Omega_2 \in \overline{\tau}$; $\Omega_i \in \overline{\tau}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \overline{\tau}$ zu checken, ist eine etwas umständliche aber einfache Übung.)

Nun habe ich in der Vorlesung behauptet, dass die Topologie $\overline{\tau}$ von der Metrik d_f (für ein beliebiges f, das den genannten Voraussetzungen genügt) induziert wird.

Was bedeutet das?

Wir definieren eine Topologie τ_f auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\overline{\mathbb{R}} \supset \Omega \in \tau_f \;:\Longleftrightarrow\; \forall x \in \Omega \;\exists \varepsilon > 0 : \{y \in \overline{\mathbb{R}} : d_f(x,y) < \varepsilon\} \subset \Omega$$

Das ist im Prinzip genau die Definition einer offenen Teilmenge in der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$, nur dass

- $\mathbb{R}$ durch $\overline{\mathbb{R}}$ und
- $|x-y|$ durch $d_f(x,y)$ ersetzt werde.

Wenn wir davon sprechen, dass eine Metrik eine Topologie induziert, so ist stets die obige Definition gemeint.

Damit ist unsere Behauptung sehr kurz formulierbar, sie lautet

$$\overline{\tau} = \tau_f .$$

Beweis in mehreren Schritten:

(1) Sei $\Omega \in \tau$. Dann existiert zu jedem $x \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$, so dass $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \Omega$. Da f^{-1} in $f(x)$ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - f(x)| < \delta$ gilt: $|f^{-1}(t) - x| < \varepsilon$.

Ist dann $y \in \mathbb{R}$ mit $d_f(x,y) < \delta$, so folgt

$$|x-y| = |x - f^{-1}(f(y))| < \varepsilon \quad (\text{weil: } |f(x)-f(y)| < \delta)$$

und also ist

$$\{y \in \mathbb{R} : d_f(x,y) < \delta\} \subset \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < \varepsilon\} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \Omega.$$

Das gilt für ein jedes $x \in \Omega$ und daher ist Ω bezüglich d_f offen, oder kurz: $\Omega \in \tau_f$

Wir haben also jetzt gezeigt, dass $\boxed{\tau \subset \tau_f}$

(2). Nun sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ und $\Omega \in \tau_f$. Zu jedem $x \in \Omega$ existiert dann ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\{y \in \mathbb{R} : d_f(x,y) < \varepsilon\} \subset \Omega$$

Nun ist f in x stetig, also existiert ein $\delta > 0$, so dass $d_f(x,y) = |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ist für alle $y \in (x-\delta, x+\delta)$. Also:

$$(x-\delta, x+\delta) \subset \{y \in \mathbb{R} : d_f(x,y) < \varepsilon\} \subset \Omega .$$

Da wir zu jedem $x \in \Omega$ ein solches $\delta > 0$ finden können, ist Ω also offen im gewöhnlichen Sinn, d.h. wir haben $\Omega \in \tau$.

Gilt für alle $\Omega \in \tau_f$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}$. Das können wir auch ausdrücken durch

$$\boxed{\{\Omega \cap \mathbb{R} : \Omega \in \tau_f\} \subset \tau \qquad (\subset \overline{\tau})}$$

Zusammenfassung mit (1):

$$\boxed{\{\Omega \cap \mathbb{R} : \Omega \in \tau_f\} = \tau}$$

Zwischenbem.: Bisher haben wir die Punkte $\pm\infty$ außer 8 gelassen und von den Voraussetzungen an f lediglich benutzt, dass

- f injektiv ist (damit d_f eine Metrik wird) und
- f stetig ist (woraus in $\mathbb{R}$ ja die Stetigkeit der Umkehrfunktion folgt).

Gezeigt haben wir, dass für jede solche Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$ die Standardtopologie erzeugt wird.

Nehmen wir jetzt zusätzlich an, dass $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert, so ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n$ (der natürlichen Zahlen) eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d_f)$, die nicht (in $\mathbb{R}$) konvergiert. $(\mathbb{R}, d_f)$ ist in diesem Fall also nicht vollständig, was für $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ per def. der Fall ist. Da beide metrischen Räume dieselbe Topologie haben, sehen wir

Vollständigkeit ist eine metrische und keine topologische Eigenschaft!

(3) Die ε-Umgebungen von $\pm\infty$ in $(\overline{\mathbb{R}}, d_f)$

(Jetzt sei wieder f streng monoton steigend und

$f(\pm\infty) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$!)

$$U_\varepsilon(-\infty) = \{y \in \overline{\mathbb{R}} : d_f(y,-\infty) < \varepsilon\} = \{y \in \overline{\mathbb{R}} : |f(y) - f(-\infty)| < \varepsilon\}$$

$$= \{y \in \overline{\mathbb{R}} : f(y) < f(-\infty) + \varepsilon\} = \{y \in \overline{\mathbb{R}} : y < f^{-1}(f(-\infty)+\varepsilon)\}$$

$$= [-\infty, b) \quad \text{für } b = f^{-1}(f(-\infty)+\varepsilon)$$

Ebenso

$$U_\varepsilon(\infty) = (a, \infty] \quad \text{für } a = f^{-1}(f(\infty)-\varepsilon)$$

Intervalle dieses Typs sind offen in $(\overline{\mathbb{R}}, d_f)$, auch ihre Vereinigung mit $\Omega \in \tau$.

Folgerung: Für

$$\overline{\tau} \underset{\text{p.d.}}{=} \{\Omega, [-\infty,b)\cup\Omega, \Omega\cup(a,\infty], [-\infty,b)\cup\Omega\cup(a,\infty] : \Omega\in\tau\}$$

ist $\boxed{\overline{\tau} \subset \tau_f}$.

Bleibt noch die umgekehrte Inklusion zu zeigen:

(4) Sei $\Omega \in \tau_f$. Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}$ ist, wissen wir bereits,

dass $\Omega \in \tau$. Bleiben die drei Fälle

(i) $-\infty \in \Omega, \infty \notin \Omega$; (ii) $-\infty \notin \Omega, \infty \in \Omega$; $\{\pm\infty\} \subset \Omega$

von denen wir exemplarisch den ersten behandeln:

Da $-\infty$ ein innerer Punkt von Ω ist, gibt es eine offene Umgebung $U_\varepsilon(-\infty) \subset \Omega$. Diese hat die Gestalt $U_\varepsilon(-\infty) = [-\infty, a)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ (nach (3)), wobei wir o. E. $a < 0$ annehmen können. Dann

ist
$$\Omega = [-\infty, a) \cup \underbrace{((2a, \infty) \cap \Omega)}_{\in \tau_f \,\wedge\, \subset \mathbb{R},\ \text{also} \in \tau}$$

$$= [-\infty, a) \cup \Omega' \text{ mit einem } \Omega' \in \tau.$$

Damit ist $\Omega \in \overline{\tau}$ gezeigt.

Die Modifikation für die anderen Fälle scheint mir offensichtlich zu sein. Also

$$\boxed{\tau_f \subset \overline{\tau}}$$

und insgesamt:

$$\boxed{\tau_f = \overline{\tau}}$$