Tut Ana III, 09.12.20 — Lösungen 

1. Beantwortung der Frage:

Sei $(x_n)_n$ eine Folge in $K$, die in $X$ konvergiert. Dann ist z.z., dass $x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n \in K$.

Nun ist $K$ folgenkompakt, d.h. es gibt eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ und ein $x_1 \in K$ (!), so dass $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_1$. Da Konvergenz auf Teilfolgen vererbt wird, erhalten wir

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_1 \implies x_0 \in K.$$

2. Aufgaben zu diesem Thema:

(a) $K_1, \ldots, K_N \subset (X,d)$ seien kompakt und $\bigcup_{j=1}^{N} K_j \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$. Dann sind insbes.

$K_j \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i \quad \forall j \in \{1, \ldots, N\}$. Dann existieren n. Vor. endliche Indexmengen $I_1, \ldots, I_N \subset I$, so dass $K_j \subset \bigcup_{i\in I_j} \Omega_i$. Daraus folgt

$$\bigcup_{j=1}^{N} K_j \subset \bigcup_{j=1}^{N} \bigcup_{i\in I_j} \Omega_i,$$ und damit ist eine endliche Teilüberdeckung gefunden.

Den zweiten Teil von (a) kann man auf (b) zurückführen: Seien $K_j$ kompakt für $j \in J$. Dann ist $\bigcap_{j \in J} K_j =: A$ abgeschlossen (weil alle $K_j$ abgeschlossen sind und der beliebige Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist). Wählen wir irgend ein $j_0 \in J$ aus, haben wir $A \subset K_{j_0}$, wobei $K_{j_0}$ kompakt und $A$ abgeschlossen ist. Jetzt Teil (b) anwenden.

(b) $A$ abgeschlossen, $K$ kompakt, $A \subset K$

Bh.: Dann ist $A$ kompakt.

Bw.: Sei $A \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. $\Rightarrow K \subset \underbrace{A^c}_{\text{offen}} \cup \bigcup_{i \in I} \Omega_i$

Dann existiert eine endliche Indexmenge $I_0 \subset I$, so dass

$$A \subset K \subset A^c \cup \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i .$$

Da $A \cap A^c = \emptyset$ ist: $A \subset \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i$.

Aufgabe zu den Lebesgue-Nullmengen:

Seien $N_k \subset \mathbb{R}^n$ $\lambda_n$-Nullmengen (dabei $k \in \mathbb{N}$) und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es für $k, j \in \mathbb{N}$ Quader $Q^{\varepsilon}_{k,j} \in \mathcal{Q}^{(n)}$, so dass

$$N_k \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q^{\varepsilon}_{k,j} \quad \text{und} \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} |Q^{\varepsilon}_{k,j}| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \subset \bigcup_{k,j \in \mathbb{N}} Q^{\varepsilon}_{k,j} \quad \text{und} \quad \sum_{k,j \in \mathbb{N}} |Q^{\varepsilon}_{k,j}| < \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Also ist $N$ eine $\lambda_n$-Nullmenge!