Tutorium zur Analysis III, 09.12.20

Zum Begriff der "Überdeckungskompaktheit"

<u>Def.</u>: Eine Teilmenge K eines topologischen Raumes (X,τ) heißt (überdeckungs-) kompakt, wenn gilt: Ist $K \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ mit offenen Mengen Ω_i (also $\Omega_i \in \tau$) und einer beliebigen Indexmenge I, so existiert eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$, so dass bereits

$$K \subset \bigcup_{i\in I_0} \Omega_i .$$

(Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft: "Aus <u>jeder</u> offenen Überdeckung von K lässt sich eine <u>endliche</u> Teilüberdeckung auswählen.")

In metrischen Räumen ist dieser Begriff äquivalent zum Begriff der (Folgen-) kompaktheit, wie ich ihn in der Analysis II eingeführt habe:

<u>Def.</u>: Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (X,d) heißt (folgen-) kompakt, wenn jede Folge in K eine (in K) konvergente Teilfolge besitzt. ("Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft")

Die Überdeckungseigenschaft ist zweifellos gewöhnungsbedürftig. Es braucht etwas Übung, um mit ihr argumentieren zu können.

Bsp.: Wir zeigen die Aussage

"Jede kompakte Teilmenge K eines metrischen Raumes (X,d) ist abgeschlossen"

mit Hilfe der Überdeckungseigenschaft.

Dazu verwenden wir ferner die Charakterisierung der Abgeschlossenheit durch konvergente Folgen (Analysis II):

$A \subset (X,d)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle Folgen $(x_n)_n$ in A, die in X konvergieren, gilt, dass ihr Grenzwert in A liegt.

Nun sei $K \subset (X,d)$ überdeckungskompakt und $(x_n)_n$ eine konvergente Folge in K.

Wir nehmen an, dass $x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n \notin K$.

Dann ist $X \setminus \{x_0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x \in X : d(x,x_0) > \frac{1}{k}\}$.

Da wir $x_0 \notin K$ angenommen haben, gilt

$$K \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in X : d(x, x_0) > \tfrac{1}{k}\},$$

und dies ist eine Überdeckung von K mit offenen Teilmengen von X. Aufgrund der (Überdeckungs)kompaktheit von K gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass bereits

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} \{x \in X : d(x, x_0) > \tfrac{1}{j}\}.$$

Daraus folgt, dass $d(x, x_0) > \frac{1}{N}$ ist $\forall x \in K$. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, dass die Folge $(x_n)_n$ in K liegt und gegen x_0 konvergiert.

1. Frage dazu: Wie würde man dieselbe Aussage mit Hilfe der Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft beweisen?

2. Aufgaben dazu: Zeigen Sie mit Hilfe der Überdeckungseigenschaft:

(a) Endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte kompakter Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d) sind kompakt.

(b) Ist $K \subset (X,d)$ kompakt und $A \subset K$ abgeschlossen, so ist A ebenfalls kompakt.

Zweites Thema: μ-Nullmengen.

Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Maß.

$N \in \mathcal{A}$ heißt μ-Nullmenge, wenn $\mu(N) = 0$ ist.

Die Aussage "Die abzählbare Vereinigung von μ-Nullmengen ist ebenfalls eine μ-Nullmenge." ist mit dieser Definition eine unmittelbare Folgerung aus der σ-Subadditivität eines Maßes: Sind $\mu(N_n) = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$0 \le \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(N_n) = 0.$$

Für das Lebesgue-Maß haben wir festgestellt:

$N \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine λ_n-Nullmenge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, Q_{k,\varepsilon} \in \mathcal{Q}^{(n)} : N \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_{k,\varepsilon} \wedge \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n(Q_{k,\varepsilon}) < \varepsilon.$$

<u>Aufgabe:</u> Benutzen Sie diese Eigenschaft, um zu zeigen, dass die abzählbare Vereinigung von λ_n-Nullmengen wieder eine λ_n-Nullmenge ist.