Aufg. 1: Verträglichkeit von Bild und Urbild mit Mengenoperationen

X, Y seien Mengen mit Teilmengen $A_i \subset X$ $(i \in I)$ und $B_j \subset Y$ $(j \in J)$ sowie $f: X \to Y$ eine Abbildung.

Beweisen oder widerlegen Sie:

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j); \quad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j); \quad f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2),$$ desgl. für $f, A_{1,2}$.

Hierbei ist $f^{-1}(B_j) = \{x \in X : f(x) \in B_j\}$ und

$f(A_i) = \{f(x) : x \in A_i\}$

Lös. A1:

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \{x\in X : f(x)\in \bigcap_{j\in J} B_j\} = \{x\in X : f(x)\in B_j \ \forall j\in J\}$$

$$= \bigcap_{j\in J} \{x\in X : f(x)\in B_j\} = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$$

Im allgemeinen ist $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subsetneq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

Bsp. für $\neq$: $A_1=\{x\}$, $A_2=\{y\}$ mit $x\neq y$ und $f(x)=f(y)$

$$\Rightarrow f\Big(\bigcap_{i\in\{1,2\}} A_i\Big) = f(\emptyset) = \emptyset \subsetneq \{f(x)\} = \bigcap_{i\in\{1,2\}} f(A_i)$$

Bew. der Inklusion: $y \in f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \Rightarrow \exists\, x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ mit $f(x)=y$

$\Rightarrow y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

Beide Aussagen über die Vereinigungen sind richtig, der Bew. straight forward.

$$f^{-1}(B_1^c) = \{x\in X : f(x)\in B_1^c\} = \{x\in X : f(x)\notin B_1\}$$

$$= \{x\in X : f(x)\in B_1\}^c = f^{-1}(B_1)^c$$

$$\Rightarrow f^{-1}(B_1\setminus B_2) = f^{-1}(B_1\cap B_2^c) = f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)^c$$

Ist f nicht surjektiv, so ist $\emptyset \neq f(X)^c$, während

$f(X^c) = f(\emptyset) = \emptyset$.

Aufg. 2: Die Spur-σ-Algebra $\mathcal{A} \cap C$

Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra und $C \subset X$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} \cap C := \{ A \cap C : A \in \mathcal{A} \} \subset \mathcal{P}(X)$$

ein σ-Ring ist. (Ist $\mathcal{A} \cap C$ - aufgefasst als Teilmenge von $\mathcal{P}(C)$ - eine σ-Algebra?)

Lös. A2:

Da $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $\emptyset \cap C = \emptyset$ ist, gilt $\emptyset \in \mathcal{A} \cap C$, insbesondere ist $\mathcal{A} \cap C \neq \emptyset$.

Sind $A \cap C$ und $B \cap C$ aus $\mathcal{A} \cap C$, so sind $A, B \in \mathcal{A}$ und damit $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Es folgt $(A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap C \in \mathcal{A} \cap C$, d.h. $\mathcal{A} \cap C$ ist $\setminus$-abgeschlossen.

Sind $A_n \cap C \in \mathcal{A} \cap C$ $\forall n \in \mathbb{N}$, so sind $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und, weil $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Es folgt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap C) = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap C \in \mathcal{A} \cap C$ und damit ist $\mathcal{A} \cap C$ abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung.

Wenn $C \subsetneqq X$ ist, ist $\mathcal{A} \cap C$, als Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ natürlich keine σ-Algebra, weil dann $X \notin \mathcal{A} \cap C$. Fasst man hingegen $\mathcal{A} \cap C$ als Mengensystem $\subset \mathcal{P}(C)$ auf, so liegt wg. $X \in \mathcal{A}$ und $X \cap C = C$ eine σ-Algebra vor.

Aufg. 3 (Lebesgue-Stieltjes Prämaß)

Für eine monotone steigende Funktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben wir den Inhalt

$$\mu_F : \mathcal{J} = \{ [a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a \le b \} \to [0,\infty],\ [a,b) \mapsto \mu_F([a,b)) := F(b) - F(a)$$

definiert und gezeigt: μ_F ist ein Prämaß g.d.w. F ist linksseitig stetig.

konkretes Bsp.: $F(t) = \chi_{(0,\infty)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{" } t \le 0 \end{cases}$.

Bestimmen Sie $\mu_F([a,b))$ für

(i) $[a,b) \subset (-\infty, 0]$, (ii) $[a,b) \subset (0,\infty)$, (iii) $[a,b) = [0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$

Ist μ_F ein Prämaß?

Andererseits zeige man anhand eines konkreten Beispiels, dass μ_H für $H(t) = \chi_{[0,\infty)}(t)$ kein Prämaß ist. (wie oben $\mu_H([a,b)) = H(b) - H(a)$!)

Auflösungen siehe Manuskript zur Vorlesung, S. 22 f.