Anwendung von Aufg. 5: <u>Volumen und Schwerpunkt eines n-dim. Simplex.</u>

(Zur Diskussion in den Übungen im Anschluss an A5, wofür vermutlich nicht genug Zeit bleibt; sonst im Tutorium.)

Es sei $S(a^{(1)},\dots,a^{(n)})$ der von den Vektoren $a^{(1)},\dots,a^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ aufgespannte Simplex, das ist die Menge aller Konvexkombinationen der Punkte $a^{(0)}=0, a^{(1)},\dots,a^{(n)}$,

also $\quad S(a^{(1)},\dots,a^{(n)}) = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a^{(i)} : \lambda_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 1 \}$

Beh.: (1) Für das Volumen dieses Simplex gilt

$$|S(a^{(1)},\dots,a^{(n)})| = \frac{1}{n!} \, |\det(a^{(1)},\dots,a^{(n)})|,$$

(2) sein Schwerpunkt ist $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{a^{(i)}}{n+1}$.

Bem.: $\det(a^{(1)},\dots,a^{(n)})$ bezeichnet die Determinante derjenigen Matrix, deren Zeilen oder Spalten durch die Vektoren $a^{(1)},\dots,a^{(n)}$ gegeben sind.

Bew. per Induktion über n mit Induktionsanfang bei $n=1$:

1×1-"Matrix"

(1) $|S(a^{(1)})| = |a^{(1)}| = \frac{1}{1!} \det(a^{(1)})$ ist gerade der Betrag von $a^{(1)} \in \mathbb{R}$ oder die Länge der Strecke von $a^{(0)}=0$ bis $a^{(1)}$ auf der Zahlengeraden.

(2) Der Schwerpunkt dieser Strecke ist gerade

Anwendung A5: Simplex

Fallunterscheidung: $a^{(1)} \geq 0$, $a^{(1)} < 0$.

gegeben durch $S = \frac{1}{|a^{(1)}|} \cdot \int_0^{a^{(1)}} x \, dx = \frac{a^{(1)}}{2}$

Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ verwenden wir neben A5 die Rotationsinvarianz des Jordanschen Inhalts. Diese erlaubt uns, für

$$S(a^{(1)}, \dots, a^{(n+1)}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

anzunehmen, dass $a^{(1)} = (\tilde{a}^{(1)}, 0), \dots, a^{(n)} = (\tilde{a}^{(n)}, 0)$ mit $\tilde{a}^{(1)}, \dots, \tilde{a}^{(n)} \in \mathbb{R}^n$. Ferner schreiben wir $a^{(n+1)} = (\tilde{a}^{(n)}, h)$ mit einem $h > 0$. Dann ist

$$(1) \quad \det(a^{(1)}, \dots, a^{(n+1)}) = \begin{vmatrix} - \tilde{a}^{(1)} - & 0 \\ \vdots & \vdots \\ - \tilde{a}^{(n)} - & 0 \\ - \tilde{a}^{(n+1)} - & h \end{vmatrix},$$

und die Entwicklung nach der letzten Spalte ergibt $\dots = \pm h \cdot \det(\tilde{a}^{(1)}, \dots, \tilde{a}^{(n)})$. Nun ergeben A5 und die Induktionsvoraussetzung

$$|S(a^{(1)}, \dots, a^{(n+1)})| \overset{A5}{=} \frac{h}{n+1} \cdot |S(\tilde{a}^{(1)}, \dots, \tilde{a}^{(n)})|$$

$$\overset{I.V.}{=} \frac{h}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} |\det(\tilde{a}^{(1)}, \dots, \tilde{a}^{(n)})| = \frac{1}{(n+1)!} |\det(a^{(1)}, \dots, a^{(n+1)})|.$$

(2) Der SP von $S(a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$ sei mit $s^{(n)}$ bezeichnet.

$$\leadsto s^{(n+1)} \overset{A5}{=} \frac{1}{n+2} \left((n+1)(s^{(n)}, 0) + a^{(n+1)} \right)$$

$$\overset{I.V.}{=} \frac{1}{n+2} \left(\sum_{i=1}^{n} a^{(i)} + a^{(n+1)} \right) = \frac{1}{n+2} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} a^{(i)}.$$

Aufgabe zum Thema (Mengen-) Ringe (Tutorium vom 24.11.20)

Es seien $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem, $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \cup \{\emptyset\}$ und, für $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{M}_{n+1} := \{A \cup B, A \setminus B : A, B \in \mathcal{M}_n\}.$$

Wie üblich bezeichne $r(\mathcal{M})$ den von $\mathcal{M}$ erzeugten Ring.

Zeigen Sie, dass $r(\mathcal{M}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{M}_n$.

Lösung: Für "$\subset$" reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{R} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{M}_n$ ein Ring ist. (Per def. umfasst $\mathcal{R}$ ja das Mengensystem $\mathcal{M}$)

Zunächst ist $\emptyset \in \mathcal{M}_0$, damit auch $\emptyset \in \mathcal{R}$, so dass $\mathcal{R} \neq \emptyset$. Es gilt sogar $\emptyset \in \mathcal{M}_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, denn aus $\emptyset \in \mathcal{M}_n$ folgt, dass auch $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \in \mathcal{M}_{n+1}$ ist. Hieraus ergibt sich weiter, dass $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$, denn $A \in \mathcal{M}_n$ impliziert $A = A \cup \emptyset \in \mathcal{M}_{n+1}$. Nun seien $A, B \in \mathcal{R}$. Dann gibt es $n_{1,2} \in \mathbb{N}$, so dass $A \in \mathcal{M}_{n_1}$ und $B \in \mathcal{M}_{n_2}$. Für $n := \max(n_1, n_2)$ sind dann $A, B \in \mathcal{M}_n$ und daher $A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{M}_{n+1} \subset \mathcal{R}$.

Für "$\supset$" müssen wir nur $\mathcal{M}_n \subset r(\mathcal{M}) \ \forall n \in \mathbb{N}$ einsehen, was für $n = 0$ klar ist, weil $\mathcal{M} \subset r(\mathcal{M})$ und jeder Ring die leere Menge als Element enthält. Induktionsschritt $n \to n+1$. Sei $C = A \circ B$ (für $\circ \in \{\cup, \setminus\}$) $\in \mathcal{M}_{n+1}$ mit Mengen $A, B \in \mathcal{M}_n$. Da $r(\mathcal{M})$ ein Ring ist, sind mit $A, B \in r(\mathcal{M})$ (Induktionsvoraussetzung) auch $A \cup B$ und $A \setminus B \in r(\mathcal{M})$, also $C \in r(\mathcal{M})$ bzw. $\mathcal{M}_{n+1} \subset r(\mathcal{M})$.