4. Tutorium am 17.11.20 ①

Berechnung einiger Trägheitsmomente

Def. (auf dem Übungsblatt 3):

$$J_{K,G} = \int_K \operatorname{dist}(x,G)^2\ \rho(x)\, d^3x = \int_K \operatorname{dist}((x,y,z),G)^2 \rho(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

Betrachten wir hier Körper mit einer homogenen Massenverteilung, d.h. konstanter Dichte $\rho \equiv 1$ (der Einfachheit halber)

Bsp: Trägheitsmoment einer Kugel $\overline{B_R(0)} =: B$ bezüglich einer Gerade G durch den Schwerpunkt $S = (0,0,0)$.

Dann können wir wg. der Rotationssymmetrie der Kugel annehmen, dass $G = \mathbb{R}e_z$.

$$J_{B,G} = \int_B x^2+y^2 \; d(x,y,z) \overset{\text{Symm.}}{=} 2 \cdot \int_B x^2\, d(x,y,z)$$

$$= 2 \cdot \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \int_{-\sqrt{R^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-z^2-y^2}} x^2\, dx\, dy\, dz$$

$$\overset{\text{Symm.}}{=} 16 \cdot \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2-y^2}} x^2\, dx\, dy\, dz$$

$$= \frac{16}{3} \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} (R^2-z^2-y^2)^{3/2}\, dy\, dz$$

Jetzt substituieren wir $y = \sqrt{R^2-z^2} \cdot \sin(t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\Longrightarrow \quad dy = \sqrt{R^2-z^2} \cdot \cos(t)\,dt\,; \quad (R^2-z^2-y^2)^{3/2} = (R^2-z^2)^{3/2} \cdot \cos(t)^3,$$

so dass

$$J_{B,G} = \frac{16}{3} \cdot \int_0^R (R^2-z^2)^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^4(t)\,dt \,.\, dz$$

Nebenrechnung!

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin'(t)\cos^3(t)\,dt$$

$$= \sin(t)\cos^3(t)\Big|_0^{\pi/2} + 3\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^2(t)\,dt$$

$$= 3 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt - 3 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^4(t)\,dt$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^4(t)\,dt = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{16}$$

$$J_{B,G} = \pi \cdot \int_0^R (R^2-z^2)^2\,dz = \pi \cdot \int_0^R R^4 - 2R^2z^2 + z^4\,dz$$

$$= \pi R^5 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \pi R^5 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}\pi R^5.$$

Jetzt können wir (wie es üblicherweise geschieht) noch das Trägheitsmoment mit Hilfe der Masse $M_B = \frac{4\pi}{3}R^3$ ausdrücken!

$$J_{B,G} = \frac{8}{15}\pi R^5 = \frac{2}{5}R^2 \cdot \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{2}{5}M_B R^2$$

Aufgabe 1: Für den Zylinder <u>Aufgabenstellung</u>

$$Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le h,\ x^2+y^2 \le R^2\}$$

der Höhe h und dem Kreis vom Radius R als Basis berechne man die Trägheitsmomente $J_{Z,G}$ (unter der Annahme konstanter Dichte $\rho \equiv 1$) für

(a) $G = \mathbb{R} e_z$ (z-Achse) ; (b) $G = \mathbb{R} e_x$ (x-Achse)

Drücken Sie auch $J_{Z,G}$ durch M_Z aus!

Aufg. 2: Es seien $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ und $G = \mathbb{R} e \subset \mathbb{R}^3$ mit $e = (e_1, e_2, e_3)$ und $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$.

Bestimmen Sie einen Ausdruck für $d(x, G)^2$, der für die Integralberechnungen geeignet ist.

Lösung der A1:

(a) $G = \mathbb{R}e_z \Rightarrow J_{z,G} = \int\limits_Z x^2+y^2 \, d(x,y,z) \overset{\text{Symm.}}{=} 2\int\limits_Z x^2 \, d(x,y,z)$

$$= 2\cdot\int_0^h \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^2\,dx\,dy\,dz$$

$$= 8\cdot h\cdot \int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} x^2\,dx\,dy$$

$$= \frac{8\cdot h}{3}\cdot \int_0^R \sqrt{R^2-y^2}^{\,3}\,dy$$

Subst. $y = R\sin(t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$dy = R\cos(t)\,dt$

$\sqrt{R^2-y^2} = R\cdot\cos(t)$

$$= \frac{8\cdot h}{3}\cdot R^4\cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos(t)^4\,dt}_{=\frac{3\pi}{16}\text{, s. Nebenrechnung auf S. 2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot h\cdot R^4 = \frac{R^2}{2}\,\pi R^2\cdot h = \frac{R^2}{2}\cdot M_Z$$

(b) $G = \mathbb{R}e_x \Rightarrow J_{z,G} = \int\limits_Z y^2+z^2 \, d(x,y,z)$

$= \int\limits_Z y^2\,d(x,y,z) + \int\limits_Z z^2\,d(x,y,z) = I_1 + I_2$, wobei

$I_1 = \frac{\pi}{4}\cdot h\cdot R^4 = \frac{R^2}{4}\cdot M_Z$, wie gerade berechnet, und

$$I_2 = \int_0^h z^2\left(\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx\right)dy\right)dz$$

Nun ergeben die inneren Integrale gerade die Fläche des Kreises mit Radius R, das ist πR^2, also ist

$$I_2 = \pi R^2\cdot h^3/3 = \frac{h^2}{3}\cdot M_Z \Rightarrow J_{z,G} = \left(\frac{R^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)M_Z.$$

Lösung der A2.:

Man zerlegt $x = x_\parallel + x_\perp$ mit $x_\parallel = \langle x,e\rangle e$ und erhält

$$x_\perp = x - x_\parallel = x - \langle x,e\rangle e \Rightarrow |x_\perp|^2 = |x - \langle x,e\rangle e|^2 = \ldots$$

$$= |x|^2 - 2\langle x,e\rangle^2 + \langle x,e\rangle^2 |e|^2 = |x|^2 - \langle x,e\rangle^2$$

Nun ist der senkrechte Abstand bekanntlich immer der kürzeste und daher

$$d(x,G)^2 = |x_\perp|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)^2$$

$$= x_1^2(1-e_1^2) + x_2^2(1-e_2^2) + x_3^2(1-e_3^2)$$

$$- 2(x_1x_2e_1e_2 + x_2x_3e_2e_3 + x_3x_1e_3e_1),$$

und dann kann man nur darauf hoffen, dass sich beim Integrieren weitere Vereinfachungen ergeben.