Berechnung einiger Volumina Tutorium am 10.11.20

Berechnen Sie das Volumen von

(1) $K := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \leq 1 \wedge y^2+z^2 \leq 1 \}$

mit Hilfe des Satzes von Fubini. Versuchen Sie zwei verschiedene Integrationsreihenfolgen!

(2) $E := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \}$

mit Hilfe der Aufg. 3.

(3.) $P := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax^2 + 2bxy + cy^2 \leq z \leq 1 \}$

mit Hilfe des Satzes von Fubini, wobei $a,b,c > 0$

und $\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2 > 0$.

Lösungen der Tutorium am 10.11.20

(2)

(i) ein einfache Lösung

$$|K| = \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \Big(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dx \Big) dy \Big) dz$$

$$= 8 \cdot \int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \Big(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} dx \Big) dy \Big) dz$$

$$= 8 \cdot \int_0^1 1-z^2 \, dz = 8\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

(ii) komplizierte Lösung

$(x,y,z) \in K \iff -1 \le x \le 1 \wedge -\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2} \wedge -\sqrt{1-z^2} \le y \le \sqrt{1-z^2}$

$$|K| = \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dy \Big) dz \Big) dx$$

$$= 8 \cdot \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-z^2} \, dz \, dx$$

Subst. $z = \sin(t)$, $0 \le t \le \arcsin(\sqrt{1-x^2})$, $dz = \cos(t)dt$

$$= 8 \int_0^1 \int_0^{\arcsin(\sqrt{1-x^2})} \cos^2(t) dt \, dx$$

mit $\int \cos^2(t) dt = \frac{1}{2}(t + \sin(t)\cos(t))$

$$= \frac{8}{2} \cdot \int_0^1 \arcsin(\sqrt{1-x^2}) + \sqrt{1-x^2}\, x \, dx$$

Subst $x = \cos(t)$, $dx = -\sin(t)dt$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$= 4 \Big\{ -\int_{\pi/2}^{0} t \sin(t) dt - \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \Big|_0^1$$

$$= 4 \Big\{ \int_0^{\pi/2} t \sin(t) dt + \frac{1}{3} \Big\}$$

$f \quad g'$, Randterme fallen weg

$$= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(t) dt + \frac{4}{3} = 4\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

Bei der Anwendung des Satzes von Fubini ist es also ratsam, die Integrationsreihenfolge sorgfältig auszuwählen. Dadurch kann man sich in manchen Fällen viel Arbeit ersparen!

(2) $E = T \cdot \overline{B_1(0)}$ für $T(x,y,z) = (ax, by, cz)$

$$\Longrightarrow \quad |E| = a \cdot b \cdot c \cdot |\overline{B_1(0)}| = \frac{4\pi}{3} a \cdot b \cdot c .$$

A3

(3) $(x,y,z) \in P \iff 0 \le z \le 1 \wedge ax^2 + 2bxy + cy^2 \le z$

2. Ungleichung $\iff x^2 + \frac{2by}{a} x + \frac{c}{a} y^2 \le \frac{z}{a}$

$$\iff x^2 + \frac{2by}{a} x + \frac{b^2 y^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} y^2 + \frac{ac}{a^2} y^2 \le \frac{z}{a}$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{a} y\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a^2} y^2 \le \frac{z}{a}$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{a} y\right)^2 \le \frac{az}{a^2} - \frac{ac-b^2}{a^2} y^2$$

$$\iff -\underbrace{\left(\frac{az}{a^2} - \frac{ac-b^2}{a^2} y^2\right)^{1/2}}_{=:\sqrt{\quad}} \le x + \frac{b}{a} y \le \underbrace{\left(\frac{az}{a^2} - \frac{ac-b^2}{a^2} y^2\right)^{1/2}}_{=:\sqrt{\quad}}$$

$$\iff -\sqrt{\quad} - \frac{b}{a} y \le x \le \sqrt{\quad} - \frac{b}{a} y$$

Damit die Sache funktioniert, muss die Wurzel definiert sein, d.h. wir brauchen

$$\frac{az}{a^2} - \frac{ac-b^2}{a^2} y^2 \ge 0 \iff (ac-b^2) y^2 \le az \iff -\sqrt{\frac{az}{ac-b^2}} \le y \le \sqrt{\frac{az}{ac-b^2}}$$

$$\Rightarrow |P| = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{\frac{az}{ac-b^2}}}^{\sqrt{\frac{az}{ac-b^2}}} \left(\int_{-\sqrt{\quad} - \frac{b}{a} y}^{\sqrt{\quad} - \frac{b}{a} y} dx \right) dy \right) dz$$

$$= 4 \cdot \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{\frac{az}{ac-b^2}}} \left(\frac{az}{a^2} - \frac{ac-b^2}{a^2} y^2 \right)^{1/2} dy \right) dz$$

$$= 4 \, \frac{\sqrt{az}}{a} \cdot \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{\frac{az}{ac-b^2}}} \left(1 - \frac{ac-b^2}{az} \cdot y^2 \right)^{1/2} dy \right) dz$$

Subst.: $\frac{ac-b^2}{az} \cdot y^2 = \sin^2(t)$ bzw. $\sin(t) = \sqrt{\frac{ac-b^2}{az}} \cdot y$ (4)

$$dy = \sqrt{\frac{az}{ac-b^2}} \cdot \cos(t)\,dt \; ; \; y=0 \Leftrightarrow t=0, \; y = \sqrt{\frac{az}{ac-b^2}} \Leftrightarrow \sin(t)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

Damit das ganze

$$\dots = 4 \cdot \frac{1}{\cancel{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \cdot \int_0^1 \cancel{a} z \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt}_{=\frac{\pi}{4}} \,dz$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}} \cdot \int_0^1 z\,dz = \frac{\pi}{2\sqrt{ac-b^2}}.$$