Analysis III

apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2020, 2. Tutorium am 03.11.20

Hallo zusammen,

im heutigen Tutorium möchte ich mit Ihnen einige Tatsachen über b-adische Entwicklungen von Zahlen wiederholen, die Ihnen bereits aus der Analysis I bekannt sein dürften. Besonders im Hinblick auf Aufgabe 1 (auf dem ersten Übungsblatt) ist das sicherlich eine sinnvolle Wiederholung.

In unserer Vorstellung ist $\mathbb{R}$ häufig einen Menge von Dezimalentwicklungen

$$\{\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \mid a_0 \in \mathbb{N},\ a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\}\,.$$

Wie man in Abschnitt 2.5.3 der Analysis I gelernt hat (S. 245ff) stimmt diese Auffassung von $\mathbb{R}$ mit der Formalen ,,Definition" überein.

Definition b-adische Entwicklung

Definition

Es seien $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, $M \in \mathbb{Z}$ und $(a_k)_{k \geq -M}$ eine Folge mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots, b\}$. Dann heißt eine Summe

$$\sum_{k=-M}^{\infty} a_k b^{-k}$$

b-adische Entwicklung. Existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $a_k = 0$ für $k \geq N$ so sprechen wir auch von einer abbrechenden b-adischen Entwicklung.

Allgemeine Informationen

Klar war schon damals: Eine b-adische Entwicklung konvergiert tatsächlich gegen eine reelle Zahl. Außerdem hatten wir als Satz gezeigt, dass jede reelle Zahl auch eine b-adische Entwicklung besitzt. In dem Beweis zu diesem Satz wurde auch ein Algorithmus vorgestellt wie man zu einer gegebenen Zahl die b-adische Entwicklung ausrechnen kann.

Um allerdings die Eindeutigkeit dieser Darstellung zu erzwingen bedarf es einer zusätzlichen Voraussetzung:

Eindeutigkeit der b-adischen Entwicklung

Satz

Sind unendlich viele der Koeffizienten in der Darstellung als b-adische Entwicklung einer Zahl ungleich $b-1$, so ist diese Darstellung eindeutig.

Beweis.

Es seien $\sum_{k=-M}^{\infty} a_k b^{-k} = \sum_{k=-M}^{\infty} c_k b^{-k}$. Nehmen wir an $a_{k_0} \neq c_{k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{Z} \cap [-M, \infty[$ minimal gewählt. Dann folgt

$$a_{k_0} - c_{k_0} = b^{k_0} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{N} (c_k - a_k) b^{-k}.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung schätzen wir nun den Abstand dieser beiden Koeffizienten ab

$$|a_{k_0} - c_{k_0}| \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{N} |a_k - c_k| b^{k_0-k}$$

Eindeutigkeit der b-adischen Entwicklung

Der Term $|a_k - c_k|$ ist dank unserer Voraussetzung, dass unendlich viele der a_k bzw. c_k ungleich $b-1$ sind für mindestens ein $k > k_0$ echt kleiner als $b-1$. Wir schätzen also weiter ab

$$\begin{aligned}
&< (b-1)\sum_{k=1}^{\infty} b^{-k} = (b-1)\frac{1}{b}\frac{1}{1-b^{-1}} \\
&= \frac{b-1}{b}\frac{1}{1-b^{-1}} = 1.
\end{aligned}$$

Also $|a_{k_0} - c_{k_0}| < 1$ was ein Widerspruch zu $a_{k_0} \neq c_{k_0}$ ist, da beide nach Voraussetzung ganzzahlig sind. Die Darstellung als b-adische Entwicklung ist also eindeutig. $\square$

Zurück zu aktuellen Vorlesungsinhalten

Mit diesem aufgefrischten Wissen über b-adische Entwicklungen sollte Aufgabe 1 zu schaffen sein. Dort wird danach gefragt für die sog. Cantorsche Menge zu zeigen, dass diese eine Jordan-Nullmenge ist.

Um auch mit diesem neuen Begriff, der Jordan-Nullmenge, vertrauter zu werden widmen wir die restliche Zeit des heutigen Tutorium dem Betrachen verschiedener Mengen (und Zeigen, dass diese Nullmengen sind, oder auch nicht).

Aufgabe

Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Mengen um Jordan-Nullmengen handelt. Begründen Sie Ihre Behauptungen.

1. $\left\{\left\{\frac{n}{7}\right\} + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, dabei bezeichne $\{x\} = x - [x]$ den gebrochenen Anteil von x.
2. $\{e^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
3. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$
4. $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$

Lösungen der Aufgabe

1. Klar ist, dass die vorliegende Menge Beschränkt ist. Außerdem besitzt sie lediglich endlich viele Häufungspunkte, nämlich $\frac{i}{7}$ für $i \in \{1, 2, \dots 7\}$. Nach der ersten Bemerkung nach der Definition von Jordan-Nullmenge ist diese Menge also Nullmenge.
2. Nach der vierten Bemerkung nach der Definition von Jordan-Nullmenge ist jede solche Menge beschränkt. Da e^n allerdings unbeschränkt ist, kann es sich nicht um eine Nullmenge handeln.

Lösungen der Aufgabe

3. Nach dem vierten Punkt der Bemerkung nach der Definition von Jordanschem Inhalt (S. 25) ist eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine Jordan-Nullmenge wenn ihr Abschluss ein Jordan-Bereich ist und dieser Inhalt Null hat. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, ist der Abschluss von $\overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = [0,1]$. Intervalle in $\mathbb{R}$ sind aber das was wir Quader nennen, also ist $[0,1]$ trivialerweise ein Jordan-Bereich, der allerdings Inhalt Eins hat. Also ist $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ keine Jordan-Nullmenge.
4. Wir können die obere/untere Hälfte der S^1 (des Kreises) auffassen als Graph der stetigen Funktion $\phi_\pm \colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \pm\sqrt{1-x^2}$. Nach der zweiten Bemerkung nach der Definition von Jordan-Nullmenge handelt es sich hierbei also um eine Nullmenge.

Diskussion der Ergebnisse

Bereits bei diesen recht einfachen Beispielen bekommen wir schon Hinweise darauf warum die Integrationstheorie im Zusammenhang mit dem Jordan-Inhalten nicht allzu sinnvoll ist.
Die Menge $\{e^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist in unserer Vorstellung schon ,,dünn", was also nicht damit zusammenpasst, dass diese keine Jordan-Nullmenge ist (noch nicht einmal ein Jordan-Bereich ist sie, da sie ihr eigener Rand ist). Das hängt, wie die Argumentation in der Lösung der Aufgabe zeigt, damit zusammen, dass die Menge unbeschränkt ist. Also in einer neuen Auflage einer Integrationstheorie gilt es das Problem anzugehen auch unbeschränkte Nullmengen zuzulassen.
Bei dem Beispiel $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, was zwar beschränkt ist, mussten wir auch feststellen, dass es sich um keine Jordan-Nullmenge handelt. $\mathbb{Q}$ ist allerdings auch eine ehr ,,dünne" Menge insofern, als dass sie im Vergleich zu dem vollen Intervall $[0, 1]$ sehr viel weniger Punkte enthält (lediglich abzählbar viele). Ein guter Grund warum es sich bei $\mathbb{Q}$ eigentlich ebenfalls um eine Nullmenge handeln sollte.