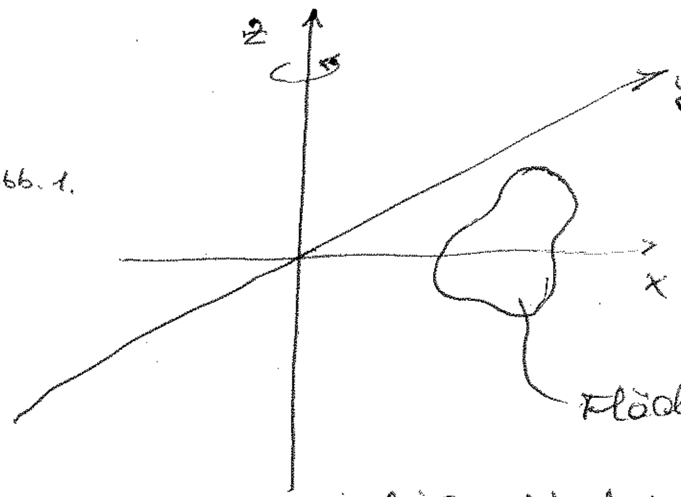
1. Tutorium am 27.10.20: Keplers Apfel

Volumina von Rotationskörpern wurden bereits bei Archimedes berechnet.

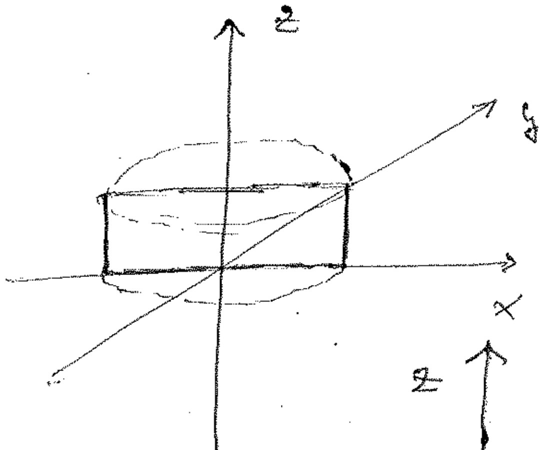
Was ist ein Rotationskörper?

Abb. 1.



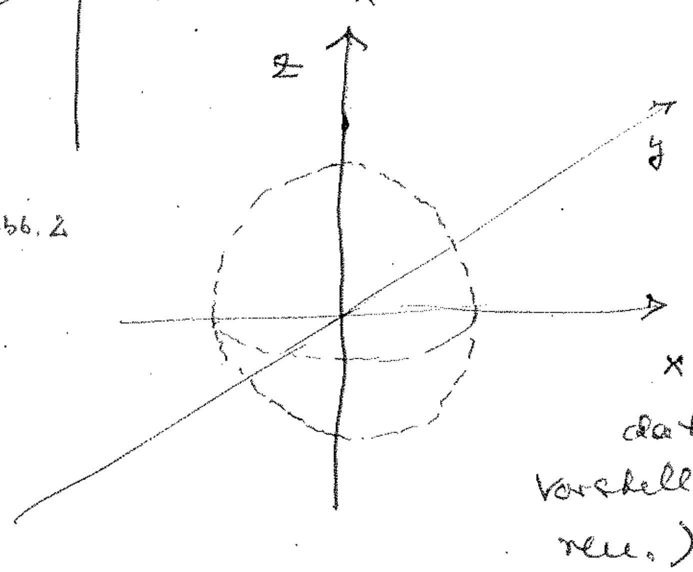
Fläche F in der x-/z-Ebene,
diese wird um die z-Achse gedreht,
bei einer vollen Umdrehung entsteht ein Rotationsk.

Archimedes betrachtet nur solche Flächen, für die die Rotationsachse eine Symmetrieachse ist, z. B.



Aus einem Rechteck entsteht durch Drehung ein Zylinderabschnitt.

Abb. 2

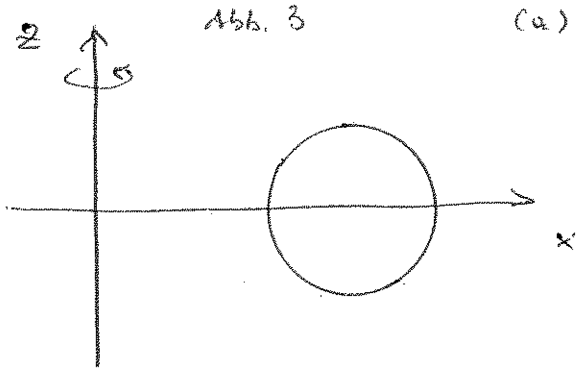


Aus einem Kreis mit Mittelpunkt auf der z-Achse entsteht eine Kugel. (In meiner Skizze leider etwas deformiert, daher muss ich an Ihr Vorstellungsvermögen appellieren.)

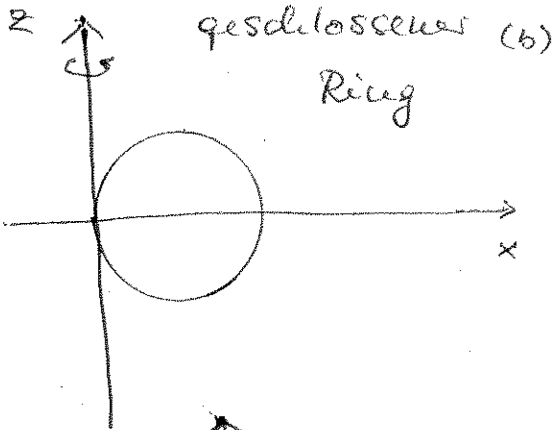
Keplers Apfel

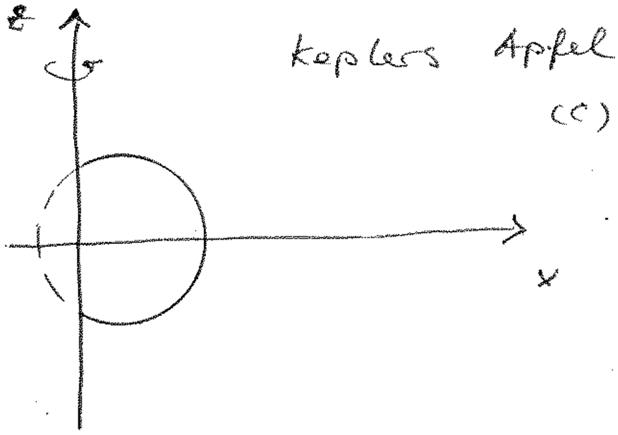
Johannes Kepler (1571–1630) war von Archimedes Überlegungen begeistert und versuchte, diese zu verallgemeinern, indem er als Rotationsachsen auch solche Geraden zulässt, die keine Symmetrieachsen sind. Bsp.

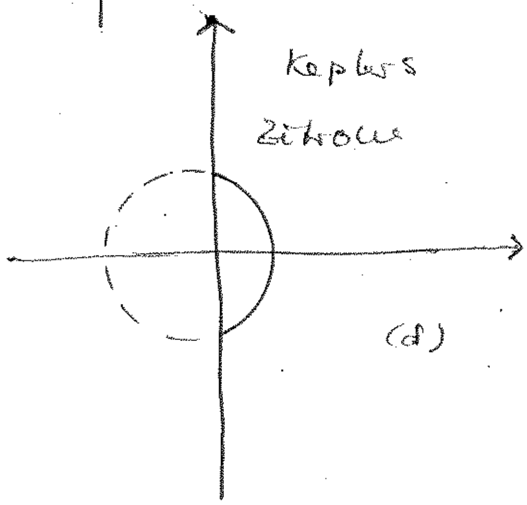
Abb. 3 (a)



Aus dem Kreis mit positivem Abstand zur Rotationsachse entsteht ein Torus oder Ring.







In seiner „Faßmessung" von 1615 dreht Kepler nicht nur Kreise, sondern auch (stehende) Ellipsen u.a., um auf diese Weise Quitten, Oliven und Weiteres zu erhalten und die jeweiligen Volumina zu berechnen.

Insgesamt findet Kepler 92 Rotationskörper, deren Volumen er bestimmen kann.

Wie ist nun Keplers Konstruktion?

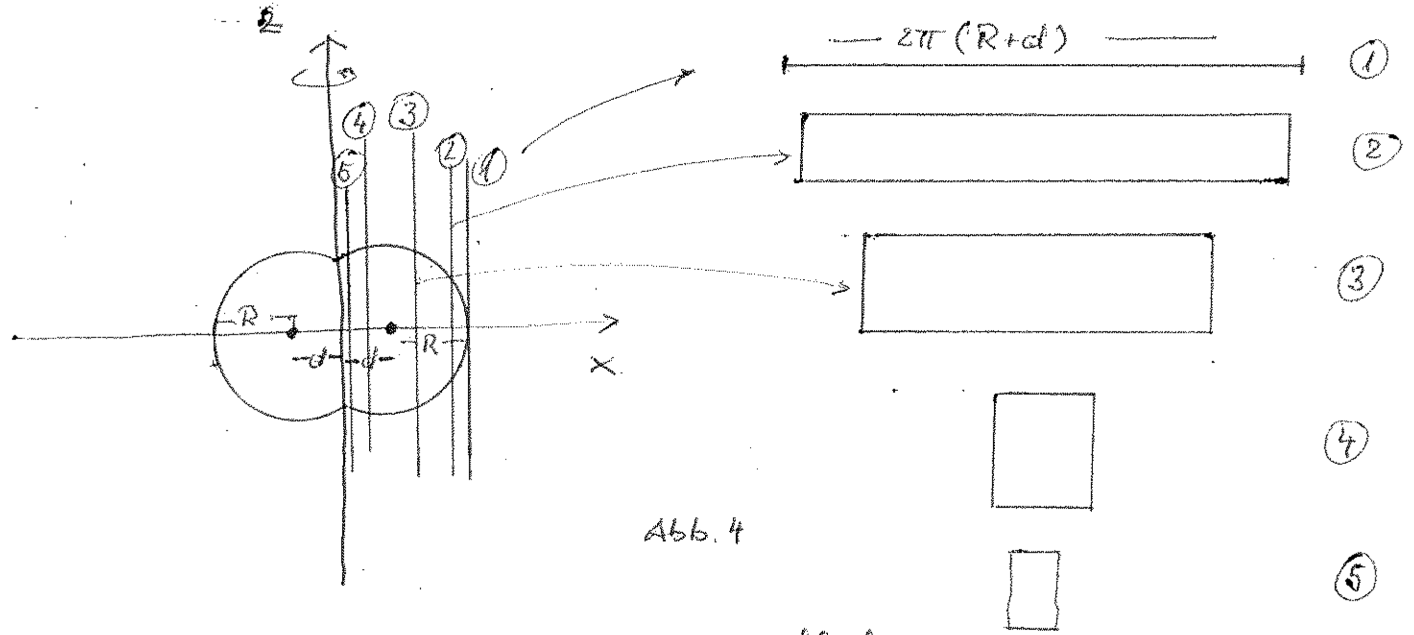
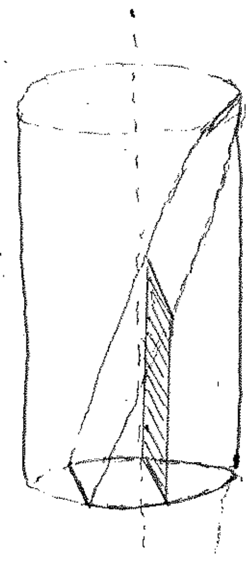


Abb. 4

Er "schält" von seinem Apfel unendlich dünne, rechteckige Scheiben ab, die ebenfalls unendlich dünnen Messer bei ①...⑤ werden dabei in konzentrischen Kreisen um die z-Achse geführt. Die Scheiben werden ausgerollt und anschließend senkrecht in einem Zylinder aufgestellt.



Dieser hat die Höhe $2\pi(R+d)$ und die Grundfläche πR^2, diese ist also gerade genau so ein Kreis, wie der gedrehte. Die "Äquatorschale" ① erreicht genau die Höhe des Zylinders. Nach und nach wird ein schräger Zylinderabschnitt – ein sogenannter "Zylinderhuf" ausgefüllt,

Abb. 5

und dessen Volumen konnte Kepler tatsächlich berechnen. Eines der senkrecht aufgestellten Rechtecke ist eingezeichnet, es hat ungefähr die Größe von ③.

④

Frage: Welches Volumen hat der geschlossene Ring, der durch Rotation des Kreises in Abb. 3 (b) entsteht?

Aufg. Berechnen Sie mit Hilfe der Keplerschen Methode das Volumen der (3-dimensionalen) Kugel vom Radius R. Zuerst sollten Sie klären, wie der entsprechende Zylinderlauf aussieht!

Lösungen: (1)

Beantwortung der Frage: Für den Kreisring (geschlossen) ist der Zylinder genau zur Hälfte ausgefüllt, für das Volumen ergibt sich mit $R=d$ (d wie in Abb. 4!)

$$V_{Ring} = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot 4\pi R = 2\pi^2 R^3 .$$

Lösung der Aufgabe: Die Kugel erhalten wir für $d=0$, und der Zylinder hat dann die Höhe $2\pi R$, der Zylinderhuf bedeckt gerade die halbe Grundfläche:

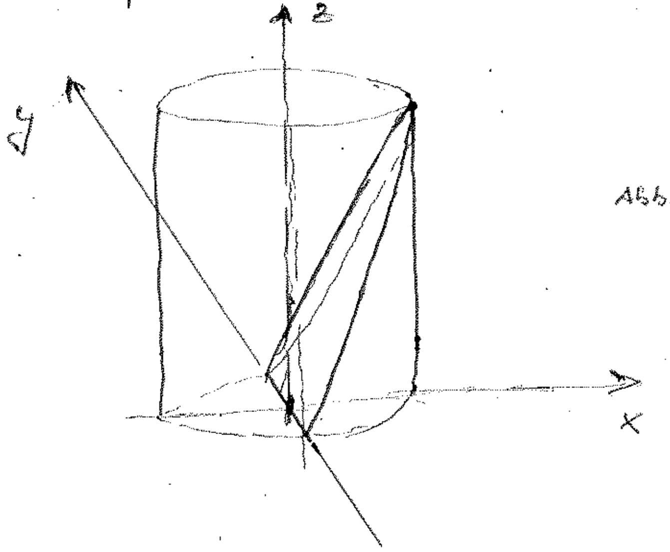


Abb. 6

Diesen kann man sich in y-Richtung geschichtet denken aus Dreiecken (wie bei Kepler und später Cavalieri von "unendlicher" oder "unteilbarer" Dünnheit), so dass sich das Kugelvolumen ergibt zu

$$V_{Kugel} = \int_{-R}^{R} \text{Dreiecksfläche}(y)\, dy .$$

Bestimmen Sie die Dreiecksfläche in Abhängigkeit von y!

Fortsetzung: Lösung der Aufgabe. (2)

Grundseite $(y) = \sqrt{R^2-y^2} =: G(y)$.

Die Steigung der Fläche beträgt genau 2π (betrachte den Fall $y=0$!), so dass Höhe$(y) = 2\pi \cdot \sqrt{R^2-y^2} =: H(y)$

$\Rightarrow$ Dreiecksfläche$(y) = \frac{1}{2} G(y) \cdot H(y) = \pi(R^2-y^2)$.

Gehen wir damit in das Integral ein, ergibt sich

$$V_{Kugel} = \int_{-R}^{R} \pi (R^2-y^2)\, dy = 2\pi \int_0^R R^2 - y^2 dy$$

$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) = \frac{4\pi}{3} R^3,$$ was wir in der Schule gelernt haben.

Mit Hilfe der Formel für das Volumen von Rotationskörpern, die wir in den Lösungen zu Aufg. 6 diskutieren werden, habe ich für Keplers Apfel mit Parameter $d \in (0,R)$ gefunden:

$$V_{Apfel} = 4\pi \left(\sqrt{R^2-d^2} \left(\frac{R^2}{3} + \frac{d^2}{6} \right) + \frac{dR^2}{2} (\pi - \varphi_d) \right),$$

wobei $\sin(\varphi_d) = \sqrt{1 - \frac{d^2}{R^2}}$.

Die auftretenden Integrale sind alle harmlos; die Rechnung geht allerdings über drei Seiten (lässt sich vielleicht noch kürzen).