Lösung und Wertung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2020/21
19.02.2021

# Klausur zu Analysis III

**Allgemeine Hinweise:** Als Hilfsmittel sind (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen und eine Liste unbestimmter Integrale gleichen Umfangs zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammeltwird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

| | |
|---|---|
| A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen) | 10 Punkte |
| A2 ($\sigma$-Algebren) | 9 Punkte |
| A3 (Konvergenzsätze für Integrale) | 9 Punkte |
| A4 (Transformationsformel für affin-lineare Abbildungen) | 6 Punkte |
| A5 (Polarkoordinaten) | 7 Punkte |
| A6 (Satz von Fubini und Tonelli) | 6 Punkte |
| A7 (Oberflächen- und Volumenintegrale) | 11 Punkte |

Die Klausur gilt mit 26 (von 58 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

**Aufgabe 1 (10 Punkte)** Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(1) Eine messbare, uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion ist Lebesgue-integrierbar.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(2) Das Zählmaß auf $(\mathbb{Q}, \mathcal{P}(\mathbb{Q}))$ ist $\sigma$-endlich.
Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(3) Eine $L^1$-konvergente Folge von Funktionen konvergiert auch punktweise fast überall.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(4) Jedes Prämaß $\mu$ auf einem Semiring lässt sich eindeutig zu einem Maß auf der $\sigma$-Algebra der $\mu^*$-messbaren Mengen fortsetzen.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(5) Die Menge $C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p < \infty$.
Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

**Aufgabe 2 (2 + 3 + 2 + 2 Punkte)**

(a) Geben Sie die definierenden Eigenschaften einer $\sigma$-Algebra an.

Im Folgenden seien $X = \mathbb{N}$ der Grundraum, die betrachteten Mengensysteme Teilmengen von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\}) \cup \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n\})^c.$$

Zeigen Sie:

(b) $\mathcal{A}_n$ ist eine $\sigma$-Algebra.

(c) $\mathcal{A}_n$ wird von $\mathcal{M}_n = \{\{1\},\{2\},\ldots,\{n\}\}$ erzeugt.

(d) $\mathcal{M} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ ist *keine* $\sigma$-Algebra.

(a) $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine $\sigma$-Algebra, wenn $X \in \mathcal{M}$ und

$A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}$; $A_n \in \mathcal{M}\ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

alternativ: –, wenn $X \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}^c$, $A_n \in \mathcal{M}\ (n\in\mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

(b) Da $\emptyset \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$ ist $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})^c$ 1P.

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \begin{cases} \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\}), & \text{wenn } A \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\}) \vee B \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})^c \\ \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})^c, & \text{"} \ A \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})^c \wedge B \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\}) \end{cases}$$ 1P.

Ist $\{A_k : k\in\mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}_n$, so gibt es $\{B_\ell : \ell\in\mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$ und $\{C_m : m\in\mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})^c$, so dass $\{A_k : k\in\mathbb{N}\} = \{B_\ell : \ell\in\mathbb{N}\} \cup \{C_m : m\in\mathbb{N}\}$.

Dann ist $\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} B_\ell \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$, $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_\ell \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})^c$ und daher 1P.

$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}_n$.

(c) Offenbar ist $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$ und daher $\sigma(\mathcal{M}_n) \subset \mathcal{A}_n$ 1P.

Andererseits: Ist $A \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$, so ist $A = M_1 \cup \ldots \cup M_N$ mit $M_k \in \mathcal{M}_n$, so dass $A \in \sigma(\mathcal{M}_n)$. Da $\sigma(\mathcal{M}_n)$ $^c$-abgeschlossen ist, gilt auch $\mathcal{A}_n \subset \sigma(\mathcal{M}_n)$. 1P.

Noch zu A2:

(d) Da $\{\{k\} : k \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$, gilt $\sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. 1P.

Aber: $2\mathbb{N} \notin \mathcal{A}_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. 1P.

**Aufgabe 3 (3 + 3 + 3 Punkte)** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x(x^2+1)}dx, \qquad \text{(c)} \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} ne^{-n^2x^2}dx.$$

Geben Sie auch eine integrierbare Majorante an, falls Sie den Lebesgueschen Konvergenzsatz anwenden.

(a) Für $x \in (-1,1)$ ist $0 \leq (1-x^2)^n \leq 1$ (← integrierbare Majorante, 1P.) und $\lim_{n\to\infty} (1-x^2)^n = \chi_{\{0\}}(x)$. (1P.).

Also (nach Lebesgue): $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = \int_{-1}^{1} \chi_{\{0\}}(x)\, dx = 0$. (1P.

---

(b) Aus Ana I bekannt: $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ und

$\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \overset{\text{MWS}}{=} |\cos(\xi)| \leq 1$. Also ist

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{x}\cdot\frac{\sin(\frac{x}{n})}{(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$ (punktweiser Grenzwert, 1P.)

und $\left|\frac{n}{x}\frac{\sin(\frac{x}{n})}{(1+x^2)}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$ (← Majorante, 1P.)

$$\underset{\text{Lebesgue}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{x}\cdot\frac{\sin(\frac{x}{n})}{1+x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} \overset{(1P.)}{=} \pi.$$

---

(c) Mit der Subst. $y = nx$, d.h. "$dy = n\,dx$" ist

$$\int_{-1}^{1} ne^{-n^2x^2}dx = \underset{(1P.)}{\int_{-n}^{n} e^{-y^2}dy} \xrightarrow[n\to\infty]{(*)} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi} \quad (1P.)$$

(*) Lebesgue mit Majorante $e^{-y^2}$,

oder Beppo Levi, oder ... (1P.)

**Aufgabe 4 (2 + 3 + 1 Punkte)**

(a) Geben Sie eine genaue Formulierung des Satzes über die Transformationsformel für affin-lineare Abbildungen an.

(b) Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformierte der Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = f(Ax+b)$ gilt

$$\hat{g}(\xi) = \cancel{\frac{e^{ib\cdot\xi}}{|\det(A)|}\hat{f}(A^{-1}\xi).} \quad \frac{e^{ib(A^{-1})^T\xi}}{|\det A|}\hat{f}((A^{-1})^T\xi)$$

(c) Folgern Sie aus Ihrem Ergebnis in (b) eine Formel für die Fourier-Transformierte der Funktion $g(x) = f(ax)$ für $a \in \mathbb{R}$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. (Man spricht vom Verhalten der Fourier-Transformation unter Skalentransformationen.)

(a) Sei $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Tx := Ax+b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\det A \neq 0$. $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann L-integrierbar, wenn $f\circ T$ L-integrierbar ist, in diesem Fall gilt $\lambda_n[f] = |\det A|\, \lambda_n[f\circ T]$.

(Auch richtig: $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, d\lambda_n(y) = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)\, d\lambda_n(x)$, wenn nur die Formel (ohne Voraussetzungen) angegeben wird, gibt's nur einen P.)

(b) $\hat{g}(\xi) = c_n \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} g(x)\, dx$ <u>1P.</u>

$= c_n \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(Ax+b)\, dx$

Jetzt: $y = Ax+b$

$A^{-1}(y-b) = x$

$= c_n \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iA^{-1}(y-b)\xi} f(y) \frac{1}{|\det(A)|}\, dy$ <u>1P.</u>

$= \frac{c_n}{|\det(A)|} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y-b)(A^{-1})^T\xi} f(y)\, dy$

$$= \frac{c_n}{|\det(A)|} \, e^{ib(A^{-1})^T\xi} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy(A^{-1})^T\xi} f(y)\,dy$$

$$= \frac{e^{ib(A^{-1})^T\xi}}{|\det(A)|} \cdot \hat{f}((A^{-1})^T\xi) \qquad \underline{1P.}$$

(c) Mit $b = 0$ und $A = a E_n$ $\left(\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a} E_n\right)$

ergibt sich

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{a^n} \cdot \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right) \qquad \underline{1P.}$$

Klausuraufgabe: Berechnen Sie für $\alpha > 0$ und $0 < \varepsilon < R$ das Integral

7P.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(\varepsilon, R)}(|x|)\, |x|^{-\alpha} dx. \qquad \text{(A5)}$$

(Die Oberfläche $\omega_n$ der $n$-dimensionalen Einheitskugel müssen Sie nicht genauer bestimmen.)

Für welche $\alpha > 0$ existieren die (Lebesgue-) Integrale

$$\text{(i)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(0,1)}(|x|)\, |x|^{-\alpha} dx \qquad \text{bzw.}$$

$$\text{(ii)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(1,\infty)}(|x|)\, |x|^{-\alpha} dx$$

und welche Werte ergeben sich im Fall der Existenz?

<u>Lös.</u> und <u>Wertung</u>:

Die Polarkoordinatenformel lautet für rotationssymmetrische Funktionen $(f(x) = g(|x|))$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \omega_n \cdot \int_0^\infty g(r)\, r^{n-1} dr. \qquad \text{1P.}$$

Hier also

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(\varepsilon,R)}(|x|)\, |x|^{-\alpha} dx = \omega_n \cdot \int_\varepsilon^R r^{n-\alpha-1} dr =: I$$

Jetzt 2 Fälle:

(1) $n=\alpha$, also $n-\alpha-1=-1$:

$$I = \omega_n \cdot \int_{\varepsilon}^{R} \frac{dr}{r} = \omega_n \left(\ln(R) - \ln(\varepsilon)\right)$$ 1P.

(2) $n \neq \alpha$

$$I = \omega_n \cdot \int_{\varepsilon}^{R} r^{n-\alpha-1} dr = \omega_n \left. \frac{r^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right|_{\varepsilon}^{R}$$

$$= \frac{\omega_n}{n-\alpha}\left(R^{n-\alpha} - \varepsilon^{n-\alpha}\right)$$ 1P.

Zusatzfrage:

(i) Für $R=1$ ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(\varepsilon,1)}(|x|)|x|^{-\alpha} dx = \omega_n \cdot \begin{cases} -\ln(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \infty & \alpha = n \\ \dfrac{1-\varepsilon^{n-\alpha}}{n-\alpha} & \alpha \neq n \end{cases}$$

konvergiert für $\varepsilon \to 0$ also genau dann, wenn $n > \alpha$, 1P. und in diesem Fall haben wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(0,1)}(|x|)|x|^{-\alpha} dx = \frac{\omega_n}{n-\alpha}$$ 1P.

(ii) Für $\varepsilon = 1$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(1,R)}(|x|)|x|^{-\alpha} dx = \omega_n \begin{cases} \ln(R) \underset{R\to\infty}{\to} \infty & \alpha = n \\ \dfrac{R^{n-\alpha}-1}{n-\alpha} & \alpha \neq n. \end{cases}$$

konvergiert für $R \to \infty$ g.d.w. $\alpha > n$ 1P.

und zwar ist $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(1,\infty)}(|x|)|x|^{-\alpha} dx = \frac{\omega_n}{\alpha - n}$. 1P.

Klausuraufgaben

<u>A6</u>: Es sei $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ auf $(0,\infty)$ (Lebesgue-) integrierbar und, für $x > 0$, $g(x) := \int_x^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt$. Zeigen Sie, dass $g: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ebenfalls auf $(0,\infty)$ (Lebesgue-) integrierbar ist und dass gilt

$$\int_0^\infty g(x)\,dx = \int_0^\infty f(t)\,dt.$$

<u>A7</u>: Berechnen Sie das Volumen $V$ und die Oberfläche $S$ des Durchschnitts der Einheitskugel

$$B_1(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\}$$

mit dem Kreiszylinder

$$Z_R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < R^2\}$$

in Abhängigkeit von $R \in (0,1)$.

Lösungen zu den Klausuraufgaben:

A6: Formale Rechnung (mit dem Satz von Fubini): (6P.)

$$\int_0^\infty g(x)\,dx = \int_0^\infty \left( \int_x^\infty f(t)\,\frac{dt}{t} \right) dx$$

$$\overset{\text{Fub.}}{=} \int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} \chi_{(x,\infty)}(t)\cdot \frac{f(t)}{t}\, d(x,t) \qquad 1P.$$

$$= \int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} \chi_{(0,t)}(x)\, \frac{f(t)}{t}\, d(x,t) \qquad 1P.$$

$$\overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \chi_{(0,t)}(x)\,dx \right) \frac{f(t)}{t}\, dt \qquad 1P.$$

$$= \int_0^\infty t\cdot \frac{f(t)}{t}\, dt = \int_0^\infty f(t)\,dt \qquad 1P.$$

Die Anwendungen des Satzes von Fubini sind gerechtfertigt, wenn klar ist, dass die Funktion

$$\varphi : (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R} \quad (x,t) \mapsto \varphi(x,t) = \chi_{(0,t)}(x)\,\frac{f(t)}{t}$$

auf $(0,\infty)\times(0,\infty)$ Lebesgue-integrierbar ist. 1P.

Für $f \geq 0$ folgt das mit dem Satz von Tonelli aus den letzten 3 Zeilen der Rechnung. Anwenden mit $|f|$ (oder mit $f^\pm$) liefert die erforderliche Integrierbarkeitsaussage für $\varphi$. 1P.

A7: Volumenberechnung: In Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$$ (5+6 = 11 P.)

wird der Schnitt $B_1(0) \cap Z_R$ beschrieben durch die Bedingungen $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq r < R$, $z^2 + r^2 < 1$, (1P)

was uns unter Berücksichtigung der Funktionaldeterminante $r$ der ebenen Polarkoordinaten (1P)

auf folgendes Integral führt

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} dz \; r\,dr \; d\varphi$$ (1P.)

$$= 4\pi \int_0^R r\sqrt{1-r^2}\,dr$$ (1P)

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \left(-(1-r^2)^{3/2}\right)_0^R = \frac{4\pi}{3}\left(1-(1-R^2)^{3/2}\right)$$ (1P.)

Oberflächenberechnung: Die Fläche ist zusammengesetzt aus einem Zylindermantel mit Radius $R$ und der Höhe $h = 2\cdot\sqrt{1-R^2}$ (← 1P.), also der Fläche $S_Z = 2\pi R h = 4\pi R\sqrt{1-R^2}$ (← 1P.), und zwei Kugelkappen gleichen Flächeninhalts $S_K$.

In sphärischen Polarkoordinaten mit Gramscher Determinante $g_4(\varphi, \vartheta) = \sin^2\vartheta$ (← 1P.) ist

$$S_K = \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta_0} \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = 2\pi \int_0^{\vartheta_0} \sin\vartheta\,d\vartheta,$$ (1P.)

wobei der Winkel $\vartheta_0$ gerade durch $\cos\vartheta_0 = \sqrt{1-R^2}$ fest- 7.2

gelegt ist, wenn wir die obere Kappe berechnen.

hierfür gibt's nur dann 1P., wenn's den nicht schon vorher für die Höhe gegeben hat

Damit

$$S_K = 2\pi \left(-\cos\vartheta\right)_0^{\vartheta_0} = 2\pi\left(1-\cos\vartheta_0\right) = 2\pi\left(1-\sqrt{1-R^2}\right)$$

1P.

Alltogether: $S = S_Z + 2S_K = 4\pi R\sqrt{1-R^2} + 4\pi\left(1-\sqrt{1-R^2}\right)$

1P.

$$= 4\pi\left(1-(1-R)\sqrt{1-R^2}\right)$$