Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2020/21
25.01.2021
Blatt 11

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

39. (2 Punkte) Beweisen Sie das Kommutativ- und Distributivgesetz für die Faltung.

Hinweis: Die Faltung erfüllt auch das Assoziativgesetz, das müssen Sie aber nicht zeigen.

40. (2 + 3 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\sum_{k=2}^{\infty}(\zeta(k)-1)$ unter Zuhilfenahme einer Folgerung des Satzes von Tonelli. Dabei bezeichnet $\zeta(s)$ die Riemannsche-Zetafunktion (Aufgabe 34).

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{-2}, & 0 < x < y < 1 \\ -x^{-2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Als stückweise aus stetigen Funktionen zusammengesetzte Funktion ist f λ_2-messbar. Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dydx.$$

Ist f λ_2-integrierbar?

41. (2 + 3 Punkte) Es sei $f = \chi_{[-1,1]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Berechnen Sie $f * f$ und $f * f * f$.

42. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ihre Faltung außerhalb der Minkowski-Summe der Träger von f und g verschwindet, also die Inklusion

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f * g(x) \neq 0\} \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g).$$

Bitte wenden!

43. (2 Punkte) Zeigen Sie, für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, folgende Identität für die Fourier-Transformation (Aufgabe 35) der Faltung: $\widehat{f * g} = c_n^{-1} \hat{f} \cdot \hat{g}$. Folgern Sie hieraus, dass es in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ kein Einselement für das Faltungsprodukt gibt. Es also kein $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gibt, so dass $f * g = g$ für alle $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Zusatzfrage **(1 Punkt)**: Können Sie auch die Nicht-Existenz eines Einselements ohne die Verwendung der Fourier-Transformation folgern?

Zusatzaufgabe (2 + 2 Punkte) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie:

(a) **(Lyapunoff-Ungleichung)** Es seien $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ und $f \in L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(X)$. Für ein $\theta \in [0, 1]$ gelte $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, dann ist $f \in L^p(X)$ und es gilt

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta} .$$

(b) Falls $\mu(X) < \infty$, es sich also um einen endlichen Maßraum handelt, gilt für $p \geq q$, dass $L^p(X) \subset L^q(X)$ und die Ungleichung $\|f\|_q \leq \mu(X)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|f\|_p$.

Hinweis: Falls Sie bei (b) nicht weiterkommen, denken Sie an die Rechnung zur Bestimmung der Stammfunktion des Logarithmus.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 01.02., 16.00 Uhr
Besprechung: 02./04.02., in den Übungen