Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2020/21
18.01.2021
Blatt 10

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

34. (2 Punkte) Für $x \in \mathbb{R}$, $s > 1$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k(x) = x^{s-1}e^{-kx}\chi_{(0,\infty)}(x)$.

(a) Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx = \frac{\Gamma(s)}{k^s}.$$

(b) Verwenden Sie die Folgerung aus dem Satz von Beppo Levi zur Herleitung von

$$\Gamma(s)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s} = \int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x - 1}dx.$$

Hinweis: Die Reihe $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$ bezeichnet man auch als Riemannsche Zeta-Funktion.

35. (1 + 1 + 2 Punkte, Lemma von Riemann-Lebesgue) Es sei $c_n > 0$ eine unspezifizierte Konstante und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine λ_n-integrierbare Funktion. Wir definieren die Fourier-Transformierte $\hat{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ von f durch

$$\hat{f}(\xi) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx.$$

Hierbei bezeichnet $x \cdot \xi$ das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$.

(a) Begründen Sie die Stetigkeit der Fourier-Transformierten $\hat{f}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \le c_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$.

(c) Beweisen Sie

$$\hat{f}(\xi) = -c_n \int_{\mathbb{R}^n} f(x + \frac{\pi\xi}{|\xi|^2})e^{-ix\cdot\xi}dx = \frac{c_n}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(f(x) - f(x + \frac{\pi\xi}{|\xi|^2}))e^{-ix\cdot\xi}dx.$$

Folgern Sie hieraus $\lim\limits_{\xi\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$, falls f zusätzlich als stetig vorausgesetzt wird.

Hinweis zu (c): Nutzen Sie den Lebesgue'schen Konvergenzsatz und die Beobachtung, dass für $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$-1 = \exp(i\pi) = \exp(i\pi\frac{\xi\cdot\xi}{|\xi|^2}).$$

Die Aussage in (c) stimmt auch ohne die Voraussetzung der Stetigkeit.

Bitte wenden!

36. (1 Punkt, Leibnizsche Sektorformel) Es seien $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ und eine stetige Funktion $h\colon (\alpha, \beta) \to [0, \infty)$ gegeben, so dass h^2 auf (α, β) λ_1- (bzw. uneigentlich Riemann)-integrierbar ist. Ferner sei

$$S = \left\{(x, y) = r(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < \varphi < \beta,\ 0 < r < h(\varphi)\right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda_2(S) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta h(\varphi)^2 d\varphi$.

37. (7 Punkte, Flächeninhalt der Cardiodide) Es seien $R > 0$,

$$\Omega = B_R((R, 0)) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - R)^2 + x_2^2 < R^2\right\},$$

$$T_0\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto T_0(z) = z^2,$$

$\Omega' = T_0(\Omega)$ und T die Einschränkung von T_0 auf Ω. (Der Rand $\mathcal{C}_R = \partial\Omega'$ ist das Bild der Kreislinie vom Radius R um den Mittelpunkt $R + i0 = (R, 0)$ unter T_0. $\mathcal{C}_R$ wird als Cardiodide oder auch als Herzkurve bezeichnet. Per Definitionen gilt also

$$\mathcal{C}_R = \left\{z^2 \in \mathbb{C} \mid |z - R|^2 = R^2\right\} \cong \left\{(x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - R)^2 + x_2^2 = R^2\right\}).$$

(a) Begründen Sie, dass $T\colon \Omega \to \Omega'$ ein C^1-Diffeomorphismus ist. (Ist T_0 injektiv?)
(b) Berechnen Sie $\lambda_2(\Omega')$ mit Hilfe der Transformationsformel.
(c) Finden Sie eine Darstellung

$$\mathcal{C}_R = \{h(\varphi)(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

von $\mathcal{C}_R$ in Polarkoordinaten und berechnen Sie $\lambda_2(\Omega')$ mit Hilfe der Leibnizschen Sektorformel.

38. (2 Punkte) Es bezeichne μ das Zählmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ (also es gelte $\mu(A) = \#A$ für $A \in \mathcal{B}_1$) und $A = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$. Berechnen Sie

$$\int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} \chi_A(x, y) d\lambda(x) d\mu(y) \qquad \text{und} \qquad \int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} \chi_A(x, y) d\mu(y) d\lambda(x).$$

Sind die Voraussetzungen des Satzes von Fubini aus der Vorlesung erfüllt?

Abgabe: elektronisch bis Mo., 25.01., 16.00 Uhr
Besprechung: 26./28.01., in den Übungen