Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2020/21
11.01.2021
Blatt 9

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

30. (6 Punkte) Für ein Paar $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ definieren die Funktion $f_{\alpha,\beta}\colon (0,\infty) \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\beta}.$$

Finden Sie alle Paare $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, so dass die Funktion $f_{\alpha,\beta}$ auf $(0,\infty)$

(a) Lebesgue-integrierbar ist.
(b) uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

Hinweis: Warum ist $f_{\alpha,\beta}(x)$ λ_1-messbar? Vergessen Sie nicht für die Paare, die Sie ausschließen zu begründen weshalb $f_{\alpha,\beta}$ dann nicht integrierbar ist.

31. (1 + 1 + 2 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine λ_1-integrierbare Funktion. Zeigen Sie:

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Einschränkung $t \mapsto f(t)\chi_{(-\infty,x]}(t)$ λ_1-messbar.
(b) Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Einschränkung $t \mapsto f(t)\chi_{(-\infty,x]}(t)$ λ_1-integrierbar.
(c) Die Funktion

$$x \mapsto \int_{(-\infty,x]} f \, \mathrm{d}\lambda_1$$

ist stetig.

Hinweis: Nutzen Sie für Aufgabenteil (c) den Lebesgueschen Konvergenzsatz und das Folgenkriterium für Stetigkeit.

Bitte wenden!

32. (3 Punkte) Beweisen Sie für $x > 0$ die Darstellung

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

durch Anwendung des Lebesgueschen Konvergenzsatzes auf die Funktionenfolge

$$f_n(t) = t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \chi_{(0,n]}(t)$$

Hinweis: n-fache partielle Integration.

33. (4 Punkte) Für eine beschränkte offene Menge $K \subset \mathbb{R}^3$ und $x_0 \notin K$ heißt

$$\Phi(x_0) = \int_K \frac{\mathrm{d}x}{|x - x_0|}$$

das Newton-Potential von K in x_0. Berechnen Sie $\Phi(x_0)$ für die Kugelschale $K_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid r < |x| < R\}$. Hierzu können Sie $x_0 = (0, 0, |x_0|)$ annehmen. (Warum?)

Abgabe: elektronisch bis Mo., 18.01., 16.00 Uhr
Besprechung: 19./21.01., in den Übungen