Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2020/21
21.12.2020
Blatt 8

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

26. (4 Punkte) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass M genau dann eine λ_n-Nullmenge ist, wenn es eine Folge $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Quadern gibt, so dass $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(Q_j) < \infty$ und jedes $x \in M$ in unendlich vielen Q_j liegt.

Hinweis: Die Schwierigkeit der Aufgabe liegt nicht in der Maßtheorie. Überlegen Sie genau was die Konvergenz der Reihe bedeutet.

27. (4 Punkte) Gegeben seien ein σ-endlicher Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$, ein messbar Raum $(Y, \mathcal{C})$ sowie eine messbare Abbildung $f\colon X \to Y$. Zeigen oder widerlegen Sie: Das induzierte Maß μ_f ist σ-endlich.

28. (1 + 4 + 1 Punkte) Es seien $a \in \mathbb{R}$, $F = \chi_{(a,\infty)}$, μ_F das zugehörige Lebesgue-Stieltjes-Maß und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie

(a) f ist $\mathcal{A}_{\mu_F^*}$-messbar.

(b) f ist nach μ_F integrierbar und es gilt $\mu_F[f] = f(a)$.

Was ist $\mu_F[f]$, wenn $F = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{(a_i,\infty)}$ mit $c_i \geq 0$ und $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$?

29. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass im Lemma von Fatou (Satz 5 in Abschnitt 2.5.2) auch der Fall der strikten Ungleichung eintreten kann. Genauer: Geben Sie eine Folge nichtnegativer Funktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass

$$\lambda_1 \left[\liminf_{k\to\infty} f_k\right] < \liminf_{k\to\infty} \lambda_1 \left[f_k\right].$$

Zusatzaufgabe (2 Punkte) Zeigen Sie, dass eine monoton steigende, numerische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ schon $\mathcal{B}_1$-messbar ist.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten, einen guten Übergang ins neue Jahr und eine erholsame vorlesungsfreie Zeit!

Abgabe: elektronisch bis Mo., 11.01., 16.00 Uhr
Besprechung: 12./14.01., in den Übungen