Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2020/21
14.12.2020
Blatt 7

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

22. (2 + 4 Punkte) Es sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A}_\mu = \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A},\ \text{ex. } M \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(M) = 0 \text{ und } N \subset M\}$ ist eine σ-Algebra, die $\mathcal{A}$ umfasst.

(b) Durch $\overline{\mu}\colon \mathcal{A}_\mu \to [0,\infty]$, $\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$ wird ein vollständiges Maß definiert, das μ fortsetzt. $\overline{\mu}$ ist eindeutig bestimmt in der Weise, dass für ein weiteres Maß $\nu\colon \mathcal{A}_\mu \to [0,\infty]$ aus $\nu|_{\mathcal{A}} = \overline{\mu}|_{\mathcal{A}}$ bereits $\nu = \overline{\mu}$ (auf $\mathcal{A}_\mu$) folgt.

Bemerkung: $\mathcal{A}_\mu$ wie oben nennt man auch die Vervollständigung der σ-Algebra $\mathcal{A}$ bzgl. μ.

23. (1 + 2 + 1 Punkte)

(a) Wir definieren die linksseitig stetige Funktion

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{(k,\infty)}(t).$$

Bestimmen Sie die σ-Algebra der μ_F^*-messbaren Mengen.

(b) Es sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende, Lipschitzstetige Funktion.

(i) Zeigen Sie, dass jede λ_1-Nullmenge μ_F^*-messbar ist.

(ii) Folgern Sie mit Hilfe des Approximationssatzes, dass $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{A}_{\mu_F^*}$; d.h. jede λ_1-messbare Menge auch μ_F^*-messbar ist.

Hinweis zu (b): Denken Sie daran, dass auch Lebesgue-Stieltjes Maße vollständig sind. Tatsächlich kann man sogar zeigen, dass die σ-Algebra der μ_F^*-messbaren Mengen die Vervollständigung (siehe Aufgabe 22) der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}_1$ bezüglich μ_F^* ist.

Bitte wenden!

24. (4 Punkte) Sei $\mu\colon \mathcal{B}_n \to [0,\infty]$ ein translationsinvariantes Maß mit $\mu([0,1)^n) = 1$. Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathcal{B}_n$ gilt $\mu(A) = \lambda_n(A)$.

Hinweis: Nutzen Sie den Eindeutigkeitssatz für Maßerweiterungen und beachten Sie dabei außerdem, dass $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}^{(n)})$, die Borelsche σ-Algebra also von den Quadern mit rationalen Kanten erzeugt ist.

25. (2 Punkte) Für $\delta \geq 0$ definieren wir die Menge

$$A_\delta = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{Für unendlich viele } q \in \mathbb{N} \text{ existiert } p \in \mathbb{N} \text{ so dass } \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\delta}} \right\}.$$

Zeigen Sie, unter Verwendung des Lemmas von Borel-Cantelli (Aufgabe 18), dass es sich für $\delta > 0$ bei A_δ um eine λ_1-Nullmenge handelt.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass sich λ_1-fast alle reellen Zahlen nicht gut durch rationale Zahlen approximieren lassen, wobei „gut approximieren" hier bedeutet, dass der Fehler in Abhängigkeit des Nenners kleiner als $\frac{1}{q^{2+\delta}}$ ist. Hingegen lässt sich jede reelle Zahl gut durch rationale Zahlen approximieren, falls man mit dem Fehlerterm $\frac{1}{q^2}$ arbeitet.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 21.12., 16.00 Uhr
Besprechung: 21./22.12., in den Übungen