Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2020/21
07.12.2020
Blatt 6

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

17. (2 + 2 Punkte) Zeigen Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe der Heine-Borelschen Überdeckungseigenschaft:

(a) Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist beschränkt.

(b) Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f\colon X \to Y$ stetig und $K \subset X$ kompakt, so ist auch $f(K)$ kompakt.

Erinnerung: Eine Teilmenge $M \subset X$ eines metrischen Raums heißt beschränkt, falls es ein $R > 0$ gibt, so dass für alle $s, t \in M$ gilt $d_X(s, t) < R$.

18. (Lemma von Borel-Cantelli, 1 Punkt) Es seien $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ und $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß. Zeigen Sie, dass aus $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ bereits $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$ folgt.

19. (1 + 1 + 1 Punkte) Wir setzen $\mathcal{R} = \{A \subset \mathbb{Z} \mid \#A < \infty \text{ oder } \#A^c < \infty\}$. Das ist eine Algebra, auf der durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \#A < \infty \\ 1, & \text{falls } \#A^c < \infty \end{cases}$$

ein Inhalt gegeben wird.

(a) Bestimmen Sie das zugehörige äußere Maß μ^*.

(b) Zeigen Sie: Alle Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind μ^*-messbar.

(c) Finden Sie eine Menge $A \in \mathcal{R}$ mit $\mu(A) \neq \mu^*(A)$.

Bitte wenden!

20. (1 + 2 + 1 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ abzählbar und $N \subset \mathbb{R}$ eine λ_n-Nullmenge, so ist auch die Minkowski-Summe $M + N = \{x + y \mid x \in M, y \in N\}$ eine λ_n-Nullmenge.

(b) $N \subset \mathbb{R}$ sei eine λ_1-Nullmenge. Dann ist $N \times \mathbb{R}^{n-1}$ eine λ_n-Nullmenge.

(c) Ist $N \subset \mathbb{R}$ eine λ_1-Nullmenge und $M \subset \mathbb{R}^{n-1}$ nicht λ_{n-1}-messbar (also $M \notin \mathcal{L}_{n-1}$), so ist $N \times M$ λ_n-messbar.

Bemerkung: Nach (a) ist insbesondere jede abzählbare Teilmenge $M = M + \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ eine λ_n-Nullmenge. Teil (c) zeigt, dass die Bilder λ_n-messbarer Mengen unter stetigen (differenzierbaren, linearen) Abbildungen $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ im Allgemeinen nicht λ_{n-1}-messbar sind.

21. (1 + 3 Punkte) Man finde je ein Beispiel für

(a) λ_2-Nullmengen $A, B \subset \mathbb{R}^2$, so dass $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ keine λ_2-Nullmenge ist,

(b) λ_1-Nullmengen $A, B \subset \mathbb{R}$, so dass $A + B$ keine λ_1-Nullmenge ist.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 14.12., 16.00 Uhr
Besprechung: 14./15./17.12., in den Übungen