Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2020/21
30.11.2020
Blatt 5

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

14. (2 + 2 + 2 Punkte) Es seien Mengen X, Y mit σ-Ringen/Algebren $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ gegeben. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen oder wiederlegen Sie:

(a) $\{f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$ ist σ-Ring/Algebra auf X.

(b) $\{C \mid f^{-1}(C) \in \mathcal{A}\}$ ist σ-Ring/Algebra auf Y.

(c) $\{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ ist σ-Ring/Algebra auf Y.

15. (1+5 Punkte) Es sei X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt Atom, falls aus $B \subsetneq A$ und $B \in \mathcal{A}$ folgt, dass $B = \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) Zwei nicht-identische Atome sind disjunkt.

(b) Besitzt X höchstens abzählbar viele Elemente, so existiert zu jedem $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes Atom in $\mathcal{A}$, das x enthält. Außerdem ist $\mathcal{A}$ von seinen Atomen erzeugt. Was sind die Atome von $\mathcal{B}_n$, der Borelschen σ-Algebra von $\mathbb{R}^n$ (mit der euklidischen Topologie)?

Hinweis: zu (b): Um das zu $x \in X$ gehörige Atom zu finden, betrachten Sie den Schnitt von Mengen A_y für $y \in X$, die sich darüber definieren x zu enthalten, y aber nicht.

16. (4 Punkte) Zeigen Sie: Es gibt keine abzählbar unendlich große σ-Algebra.

Hinweis: Nutzen Sie die selben Ideen wie in Aufgabe 15, d.h. betrachten Sie die kleinsten Mengen der Algebra, die einen gegebenen Punkt enhalten.

Zusatzaufgabe (2 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ sei X eine n-elementige Menge. Für welche $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine k-elementige σ-Algebra auf X? Begründen Sie Ihre Behauptung.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 07.12., 16.00 Uhr
Besprechung: 07./08./10.12., in den Übungen