Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2020
23.11.2020
Blatt 4

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

10. (4 Punkte) Es sei $\mathcal{R}$ ein (Mengen-)Ring. Für $A, B \in \mathcal{R}$ definieren wir eine Addition

$$\oplus\colon \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}, \quad (A, B) \mapsto A \oplus B \coloneqq A \Delta B$$

und eine Multiplikation

$$\odot\colon \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}, \quad (A, B) \mapsto A \odot B \coloneqq A \cap B.$$

(Nach Lemma 2 (1) in Abschnitt 2.1 sind $\oplus$ und $\odot$ wohldefiniert.) Zeigen Sie, dass $(R, \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring im algebraischen Sinn des Wortes ist. In welchem Fall besitzt dieser ein Einselement?

Hinweis: Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze für $\cup$ und $\cap$ können Sie als bekannt voraussetzen.

11. (1+1+1+1 Punkte) Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind und beweisen Sie Ihre Behauptung.

(a) Sind $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ (Mengen-)Ringe, so ist auch $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ ein (Mengen-)Ring.

(b) Sind $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ (Mengen-)Ringe, so ist auch $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ ein (Mengen-)Ring.

(c) Ist $\mathcal{S}$ ein Semiring, so ist $\emptyset \in \mathcal{S}$.

(d) Sind $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ (Mengen-)Algebren, so ist auch $\mathcal{A}_1 \Box \mathcal{A}_2$ eine (Mengen-)Algebra.

12. (2+4 Punkte) Beweisen Sie:

(a) Zu vorgegebener Zahl $n \in \mathbb{N}$ und Menge X mit $|X| = n$ existiert zu jeder Zweierpotenz 2^l für $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Algebra mit 2^l Elementen auf X.

(b) Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ zwei Algebren auf einer Menge X so ist $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$ genau dann eine Algebra auf X, wenn $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ oder $\mathcal{A} \supset \mathcal{C}$ gilt.

13. (2 Punkte) Es sei $\emptyset \neq X$ eine Menge. Weiter seien Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset X$ gegeben. Wir definieren

$$S \coloneqq A_1 \,\Delta\, A_2 \,\Delta\, \cdots \,\Delta\, A_n.$$

(Aufgrund der in Aufgabe 13 festgestellten Assoziativität ist S wohldefiniert.) Man zeige: Ein Punkt $x \in X$ liegt genau dann in S, wenn es eine ungerade Anzahl von A_k gibt, die ihn enthalten.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 30.11., 16.00 Uhr
Besprechung: 30.11 bzw. 01./03.12., in den Übungen