Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2020/21
16.11.2020
Blatt 3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

Für einen starren Körper (K, ρ) mit $K \subset \mathbb{R}^3$ und eine Gerade $G \subset \mathbb{R}^3$ definiert man das *Trägheitsmoment* $J_{K,G}$ von (K, ρ) bezüglich G durch

$$J_{K,G} := \int_K dist(x, G)^2 \rho(x) dx.$$

Das Trägheitsmoment spielt bei der Beschreibung von Drehbewegungen eine ähnliche Rolle wie die Masse bei der Beschreibung von Translationen. Z.B. ist die *Rotationsenergie* eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega \in \mathbb{R}^3$ um G rotierenden starren Körpers (K, ρ) gegeben durch

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J_{K,G} |\omega|^2,$$

was der bekannteren Identität $E_{kin} = \frac{1}{2} M_K |v|^2$ für die kinetische bzw. Translationsenergie entspricht.

7. (4 Punkte) Beweisen Sie den nachstehenden Satz von Steiner[1]: Es sei (K, ρ) ein starrer Körper mit Schwerpunkt $S \in \mathbb{R}^3$, M_K seine Masse und $G = S + \mathbb{R}e \subset \mathbb{R}^3$ eine Gerade durch diesen Schwerpunkt. Eine weitere Gerade $G' \subset \mathbb{R}^3$ sei parallel zu G und habe zu G den positiven Abstand $d = dist(G, G')$. Dann gilt für die Trägheitsmomente von K bezüglich G und bezüglich G' der Zusammenhang

$$J_{K,G'} = J_{K,G} + M_K d^2.$$

8. (4 Punkte) Es sei $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq R,\ |y| \leq R,\ |z| \leq R\}$ der Würfel der Kantenlänge $2R$, dessen Schwerpunkt im Ursprung liegt. Berechnen Sie unter der Annahme konstanter Dichte $\rho = 1$ die Trägheitsmomente von W bezüglich

(a) der z-Achse,
(b) einer beliebigen Gerade G durch den Nullpunkt,
(c) einer beliebigen Gerade G' mit Abstand $d \geq 0$ zum Ursprung.

Bitte wenden!

[1] Jakob Steiner, 1796-1863, Schweizer Geometer, auch bekannt für die nach ihm benannte Symmetrisierung von Mengen und Funktionen

9. (8 Punkte) Für den Rotationskörper $K_{f,g}$ aus Aufgabe 6 zeige man, dass sein Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse gegeben ist durch

$$J_{K_{f,g},\mathbb{R}e_z} = \frac{\pi}{2}\int_a^b f(z)^4 - g(z)^4 dz.$$

Welches konkrete Ergebnis erhalten Sie für

(a) den Kreiskegel mit Spitze $(0,0,h)$ und der Basis $B := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq R^2\}$ bzw.

(b) den Torus $\mathbb{T}_{r,R}$ aus Aufgabe 6 ?

Abgabe: elektronisch bis Mo., 23.11.2020, 16.00 Uhr

Besprechung: 23./24./26.11., in den Übungen