Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2020/21
09.11.2020
Blatt 2

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

Unter einem starren Körper (im physikalischen Sinn) sei im Folgenden ein Paar (K, ρ) verstanden, bestehend aus einem Jordan-Bereich $K \subset \mathbb{R}^n$ und einer Riemann-integrierbaren Dichte

$$\rho : K \to [0, \infty), \quad x \mapsto \rho(x).$$

Hierfür definiert man die Masse

$$M_K := M(K, \rho) := \int_K \rho(x) dx$$

und den Schwerpunkt $S_K := S(K, \rho) := (s_1, ..., s_n) \in \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten

$$s_j := \frac{1}{M(K, \rho)} \int_K x_j \rho(x) dx, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Im Fall konstanter Dichte $\rho > 0$ vereinfachen sich diese Ausdrücke zu $M_K = \rho|K|$ bzw. zu

$$S_K = \frac{1}{|K|} \int_K x dx.$$

4. (4 Punkte) Berechnen Sie unter der Voraussetzung konstanter Dichte die Schwerpunkte der nachstehenden dreidimensionalen Halb-, Viertel- und Achtelkugel

(a) $B^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;

(b) $B^{++} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ und

(c) $B^{+++} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

vom Radius $R = 1$. Nutzen Sie Symmetrieargumente, um die Anzahl der zu berechnenden Integrale zu reduzieren.

5. (6 Punkte) Es sei $J \subset \mathbb{R}^n$ ein starrer Körper mit Schwerpunkt $S_J = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$. Darüber sei ein Kegel $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit Spitze $V = (v, h) = (v_1, ..., v_n, h) \in \mathbb{R}^{n+1}$ errichtet, wobei $h > 0$ gelte. Es sei also

$$C = \{\lambda(x, 0) + (1 - \lambda)V : 0 \leq \lambda \leq 1, \ x \in J\}.$$

Berechnen Sie das $(n+1)$-dimensionale Volumen $|C|$ und den Schwerpunkt $S_C = (s_1, ..., s_{n+1})$ in Abhängigkeit von h und $|J|$ bzw. von V und S_J. (Hierbei sei für J und C die konstante Dichte $\rho = 1$ vorausgesetzt. Zusatzfrage ohne Wertung: Liegt S_C auf der Verbindungsstrecke zwischen $(S_J, 0)$ und V ?)

Bitte wenden!

Rotationskörper: Gegeben seien ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und zwei stetige Funktionen

$$f, g : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad 0 \leq g(z) \leq f(z) \quad \text{für alle} \quad z \in [a, b]$$

sowie der Jordan-Bereich

$$K_{f,g} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [a, b] : g(z)^2 \leq x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}.$$

(Wir können hier f und g auch als stückweise stetig voraussetzen, d.h. stetig bis auf endlich viele Sprungstellen, müssen dann aber den Abschluss von $K_{f,g}$ bilden, um einen Jordan-Bereich zu erhalten.) Man kann sich $K_{f,g}$ entstanden denken durch Drehung der in der x-z-Ebene gelegenen Fläche

$$F_{f,g} := \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^2 \times [a, b] : g(z) \leq x \leq f(z)\}$$

um die z-Achse. In dieser Situation nennt man $K_{f,g}$ einen *Rotationskörper*; für die Dichte von $K_{f,g}$ ebenso wie von $F_{f,g}$ sei der Einfachheit halber $\rho \equiv 1$ angenommen.

6. (6 Punkte) Zeigen Sie für das Volumen $|K_{f,g}|$ eines Rotationskörpers, dass

$$|K_{f,g}| = \pi \int_a^b f(z)^2 - g(z)^2 dz,$$

und beweisen Sie (in dem oben dargestellten Setting) die 1. Guldinsche[1] Regel:

$$|K_{f,g}| = |F_{f,g}| L \ ,$$

wobei L der Umfang desjenigen Kreises ist, den der Schwerpunkt von $F_{f,g}$ bei der $K_{f,g}$ erzeugenden Drehung beschreibt.

Inwiefern ist der Torus

$$\mathbb{T}_{r,R} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$$

mit $0 < r \leq R$ ein Rotationskörper, und was ergibt sich für sein Volumen $|\mathbb{T}_{r,R}|$?

Abgabe: elektronisch bis Mo., 16.11.2020, 16.00 Uhr

Besprechung: 16./17./19.11., in den Übungen

[1]Nach Paul (Habakuk) Guldin, 1577 - 1643, Schweizer Astronom und Mathematiker, der diese ursprünglich von Pappos von Alexandria stammende Regel im 17. Jahrhundert wiederentdeckt hat.