Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2020/21
02.11.2020
Blatt 1

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

1. (6 Punkte) Die *Cantor'sche Nullmenge* ist definiert als $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C_n$, wobei die Mengenfolge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch

$$C_0 := [0,1], \qquad\qquad C_{n+1} := \frac{1}{3}C_n \cup \Big(\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}\Big)$$

festgelegt wird. (Für $A \subset \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist hierbei $\lambda A + \mu = \{\lambda x + \mu : x \in A\}$.) Zeigen Sie:

(a) $C = \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} : a_k \in \{0,2\} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\Big\}$;

(b) die Ziffernfolge in der triadischen Darstellung einer Zahl $x \in C$ ist eindeutig bestimmt, d.h.: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 3^{-k} \in C$, so gilt $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(c) C ist überabzählbar.

(d) C ist eine Jordan-Nullmenge.

Tipp: Abschnitt 2.5.3 der Vorlesung Analysis I

2. (6 Punkte) Das *Sierpinski-Dreieck* $S \subset \mathbb{R}^2$ wird definiert als $S := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} S_n$, wobei S_0 das abgeschlossene gleichseitige Dreieck der Kantenlänge 1 mit den Eckpunkten $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$ und $P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ist und S_{n+1} aus S_n entsteht durch

$$S_{n+1} := \frac{1}{2}S_n \cup \left(\frac{1}{2}S_n + (\frac{1}{2}, 0)\right) \cup \left(\frac{1}{2}S_n + (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})\right).$$

Die Vereinigungen hierbei sind bis auf Eckpunkte disjunkt.

(a) Skizzieren Sie S_1 und S_2 (eine Abbildung von S_6 finden Sie übrigens im aktuellen Flyer der HHU zum Master-Studiengang Mathematik) und beschreiben Sie eine Konstruktion von S durch wiederholte Entfernungen von Dreiecken aus S_0.

(b) Zeigen Sie, dass S ein Jordan-Bereich ist und bestimmen Sie den Jordanschen Inhalt von S.

Welche Folgerung bezüglich der Menge $\mathring{S}$ der inneren Punkte von S ergibt sich aus Ihrem Ergebnis zu (b) ?

Bitte wenden!

3. (4 Punkte) Es sei $J \subset \mathbb{R}^n$ ein Jordan-Bereich mit dem Inhalt $|J|$ und

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto Tx := Dx + c$$

eine affin-lineare Transformation mit einem festen Vektor $c = (c_1, ..., c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ und einer Diagonalmatrix D, deren Diagonalelemente $\lambda_1, ..., \lambda_n$ alle von Null verschieden sind. Zeigen Sie, dass TJ ebenfalls ein Jordanbereich ist mit dem Jordanschen Inhalt

$$|TJ| = \left(\prod_{k=1}^{n} |\lambda_k| \right) |J|.$$

Abgabe: elektronisch bis Mo., 09.11.2020, 16.00 Uhr

Besprechung: 09./10./12.11., in den Übungen