Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2020/21
05.03.2021
Blatt 3

FERIENTUTORIUM ZUR ANALYSIS III

Arbeitsblatt 3: Integration über k-dimensionale Flächen

Die Integration über k-dimensionale Flächen $S \subset \mathbb{R}^n$ $(1 \leq k < n)$, insbesondere die Berechnung von Bogenlängen und Flächeninhalten, ist in den Übungen im letzten Semester etwas zu kurz gekommen, was an dieser Stelle nachgeholt werden soll. Mit einer (möglicherweise auch etwas umfangreicheren) Aufgabe des folgenden Typs können Sie in der bevorstehenden 2. Klausur rechnen. Das Thema "Gauss'scher Integralsatz" wird hingegen in der Klausur keine Rolle spielen, auch wenn es sich hierbei um einen wichtigen und oft benutzten Satz der Analysis handelt. - Das hier zusammengestellte Material wird sicherlich für zwei Sitzungen des Ferientutoriums ausreichen.

Wir betrachten im Folgenden (fast) ausschließlich den einfachen Fall, dass sich eine k-dimensionale Fläche $S \subset \mathbb{R}^n$ mit einer einzelnen Parametrisierung $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ darstellen lässt. Hierbei sind $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und φ stetig differenzierbar mit $\text{Rang} D\varphi(x) = k$ für alle $x \in \Omega$ (φ ist eine *Immersion*), und bildet Ω homöomorph auf S ab. Die stetige Umkehrabbildung $\psi := \varphi^{-1} : S \to \Omega$ wird als *Karte* von S bezeichnet. Diese vereinfachende Annahme bedeutet keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, da sich das Integral über jede k-dimensionale glatte Fläche als abzählbare Summe von Integralen über glatte Flächenstücke des gerade beschriebenen Typs darstellen lässt, vgl. Satz 2 in Abschnitt 3.2 der Vorlesung. Das Integral über eines solches glattes Flächenstück S ist wiederum erklärt als

$$\int_S f(y) d\sigma_S(y) := \int_\Omega f(\varphi(x)) \sqrt{g_\varphi(x)} dx,$$

wobei $g_\varphi(x) := \det \left(D\varphi(x)^\top D\varphi(x) \right)$ die Gramsche Determinante der Parametrisierung φ ist.

Der Fall $k = 1$ ist sehr übersichtlich: Eine Kurve $C \subset \mathbb{R}^n$ werde durch eine C^1-Funktion $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ mit (außer evtl. auf einer diskreten Teilmenge) nicht verschwindenden Ableitung φ' parametrisiert, vgl. Bsp. (1) auf S. 19 in Kap. 3 der Vorlesung. Hier ist $D\varphi(t) = \varphi'(t)$ der Tangentialvektor an C im Punkt $\varphi(t)$ und die Gramsche Determinante reduziert sich auf $|\varphi'(t)|^2$ (Quadrat der euklidischen Norm der Tangente), so dass

$$\int_C f(y) d\sigma_C(y) = \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt$$

wird. Insbesondere hat man für die Bogenlänge der Kurve C

$$\sigma_C(C) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt.$$

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Länge

(a) der Schraubenlinie $C_s := \{(\cos(t), \sin(t), ct) \in \mathbb{R}^3 : 0 < t < 2\pi\}$, dabei $c \neq 0$,

(b) des Parabelbogens $P_{a,b} := \{(t, \frac{t^2}{2}) \in \mathbb{R}^2 : a < t < b\}$,

(c) des Zykloidenbogens $Z := \{(t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < 2\pi\}$.

Aufgabe 2. Häufig wird die Parametrisierung einer Kurve im $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten $\varphi(t) = r(t)(\cos(t), \sin(t))$ angegeben; insbesondere bei Spiralen ist dies zweckmäßig. Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt

$$|\varphi'(t)|^2 = r(t)^2 + r'(t)^2,$$

und berechnen Sie die Länge

(a) der Archimedeschen Spirale $\{ct(\cos(t), \sin(t)) : 0 < t < 2\pi\}$, hierbei $c > 0$,

(b) der Cardiodide $\mathcal{C}_R$ aus Aufgabe 37.

Ebenfalls recht einfach ist der Fall, dass das betrachtete Flächenstück S der Graph G_f einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^{n-1} \supset \Omega \to \mathbb{R}$ ist. In diesem Fall ist S eine $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit, die in natürlicher Weise durch

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad x' \mapsto \varphi(x') := (x', f(x'))$$

parametrisiert wird. Hierfür haben wir nachgerechnet (vgl. Kap. 3 der Vorl., S. 19, Bsp. (2)), dass

$$g_\varphi(x') = 1 + |\nabla f(x')|^2,$$

und für das $n-1$-dimensionale Flächenmass ergibt sich

$$\sigma(G_f) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2} dx'.$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Flächeninhalte der folgenden $n-1$-dimensionalen Flächen im $\mathbb{R}^n$:

(a) eines "Kreiskegels" $C := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = |x'| < 1\}$ und

(b) eines Rotationsparaboloiden $P := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = \frac{|x'|}{2} < 1\}$.

Handelt es sich bei C und P um Mannigfaltigkeiten? (Volumina und Oberflächen von Einheitskugeln müssen Sie nicht weiter ausrechnen, bei Teil (b) können Sie sich am Ende auf den Fall $n = 3$ beschränken.)

Bei der nachfolgenden “Schraubenfläche” sollen Sie dann erstmals eine Gramsche Matrix und deren Determinante selbst berechnen. Hierbei sei die Steigung $h > 0$ ein fester Parameter.

Aufgabe 4. Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$S := \{(r\cos(t), r\sin(t), ht) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r < R, 0 < t < 2\pi\}.$$

Bei der nächsten Aufgabe ist die Rechnung ganz ähnlich. Nun sollen Sie zusaätzlich die Parametrisierung der Fläche bestimmen. Im Hinblick auf die Aufgabe 4 ist diese jedoch nicht schwer zu erraten.

Aufgabe 5. Es sei $f : (a, b) \to [0, \infty)$ stetig differenzierbar und beschränkt. Für den Inhalt $\sigma(S_f)$ der Rotationsfläche

$$S_f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = f(z)^2, a < z < b\}$$

zeige man

$$\sigma(S_f) = 2\pi \int_a^b f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}dz.$$

Was ergibt sich für die Fläche des Torus $\mathbb{T}_{r,R}$ aus Aufgabe 6 von Übungsblatt 2 ?

Nun wird es ein klein wenig abstrakter: Vom Inhalt einer k-dimensionalen glatten Fläche sollte man erwarten, dass er

(a) invariant ist unter Translationen, Rotationen sowie Spiegelungen und
(b) sich um einen Faktor λ^k verändert, wenn die Fläche um einen Faktor λ homogen in alle Raumrichtungen gestreckt wird.

Dass dies zutrifft, sollen Sie in der nächsten Aufgabe überprüfen.

Aufgabe 6. Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $\varphi : \mathbb{R}^k \supset \Omega \to S$ eine *globale* Parametrisierung von S. Ferner sei

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Tx := Ax + b$$

eine affin-lineare Transformation. Zu der $n \times n$-Matrix A existiere ein $\lambda > 0$, so dass $A^\top A = \lambda^2 E_n$, wobei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix bezeichnet. Zeigen Sie, dass für alle integrierbaren Funktionen $f : T(S) \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{T(S)} f(y)d\sigma(y) = \lambda^k \int_S f(Tx)d\sigma(x).$$

Einstieg: Mit $\psi := T \circ \varphi$ ist eine globale Parametrisierung von $T(S)$ gegeben. Was erhalten Sie mit der Kettenregel für $G_\psi(t)$?

Um das Integral über eine Sphäre vom Radius $R > 0$ zu berechnen, haben wir in der Vorlesung die Hemisphären parametrisiert als Graphen von

$$f_\pm : \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : |x'| < R\} \to \mathbb{R}, \quad x' \mapsto f_\pm(x') := \pm\sqrt{R^2 - |x'|^2},$$

vgl. Abschnitt 3.2 der Vorlesung, Bsp. (3) auf S. 21. Das ist sicherlich die am häufigsten verwendete Darstellung, nicht selten variiert durch den Gebrauch von Winkelvariablen wie auf S. 22 für $n = 3$ erläutert. Eine interessante Alternative liefert die folgende Aufgabe, wobei wir uns nach Aufgabe 6 auf den Fall $R = 1$ beschränken können, um die Rechnungen ein wenig zu vereinfachen.

Aufgabe 7. Es sei $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\varphi_i(x) := \frac{2x_i}{1 + |x|^2} \quad (1 \leq i \leq n-1) \quad \text{und} \quad \varphi_n(x) := \frac{|x|^2 - 1}{1 + |x|^2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass φ den $\mathbb{R}^{n-1}$ homöomorph auf $S^{n-1} \setminus \{N\}$ abbildet, wobei $S^{n-1} := \{s \in \mathbb{R}^n : |s| = 1\}$ die Einheitssphäre und $N := (0, ..., 0, 1)$ deren Nordpol ist. Bestimmen Sie dazu explizit die Karte

$$\psi := \varphi^{-1} : S^{n-1} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^{n-1},$$

so dass Sie deren Stetigkeit ablesen können.

(b) Die Karte ψ aus (a) wird als *stereografische Projektion* bezeichnet. Um einzusehen, dass es sich um eine Projektion handelt, rechne man nach, dass N, $\varphi(x)$ und $(x, 0)$ stets auf einer Geraden liegen, derart, dass man $x = \psi(s)$ durch eine Zentralprojektion des Punktes $s \in S^{n-1}$ vom Nordpol aus auf den $\mathbb{R}^{n-1}$ erhält. (Veranschaulichen Sie sich diesen Sachverhalt anhand einer Skizze für $n = 2$.)

(c) Zeigen Sie, dass

$$D\varphi(x)^\top D\varphi(x) = \left(\frac{2}{1 + |x|^2}\right)^2 E_{n-1}.$$

Was ergibt sich daraus für die Gramsche Determinante $g_\varphi(x)$? (Bei dieser Rechnung ist der Gebrauch des Kronecker-Deltas nützlich. Wenn Sie Schwierigkeiten mit der Matrixmultiplikation haben, beschränken Sie sich ggf. auf den Fall $n = 3$.)

(d) Untersuchen Sie, für welche $\alpha > 0$ das Integral

$$I(n, \alpha) := \int_{S^{n-1}} |s - N|^{-\alpha} d\sigma(s)$$

existiert. Berechnen Sie $I(3, \alpha)$ im Existenzfall. Ändern sich Ihre Ergebnisse, wenn Sie N durch ein beliebiges (festes) $s_0 \in S^{n-1}$ ersetzen?

Besprechung: im "Ferientutorium" 15.03.-19.03.21