Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2020/21
09.03.2021
Blatt 2

FERIENTUTORIUM ZUR ANALYSIS III

Arbeitsblatt 2: Konvergenzsätze, insbes. Lebesguescher Konvergenzsatz

Zu den wichtigsten Errungenschaften der Lebesgueschen Integrationstheorie gehören zweifellos die Konvergenzsätze, die die Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung punktweise konvergenter Funktionenfolgen unter sehr allgemeinen (also schwachen) Voraussetzungen erlauben. Hier ist zuerst der Satz von Beppo Levi über monoton konvergente Funktionenfolgen zu nennen, der durch die Definition des Integrals einer nichtnegativen messbaren Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ als Grenzwert der Integrale von f aufsteigend approximierenden elementaren Funktionen geradezu erzwungen wird. Aus diesem "Satz von der monotonen Konvergenz" folgert man das Lemma von Fatou[1], und dessen Anwendung von unten und von oben ergibt den "Satz von der majorisierten Konvergenz", das ist der Lebesguesche Konvergenzsatz: Ist $(f_n)_n$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, die punktweise (fast überall) gegen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ konvergiert, und existiert eine integrierbare Funktion $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (die integrierbare Majorante) mit $|f_n(x)| \leq F(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für (fast) alle $x \in X$, so ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

(Vgl. Abschnitt 2.5.2 der Vorlesung.) Diesen Satz hat Henri Lebesgue in seiner Dissertation von 1902 allerdings noch in sehr rudimentärer Form angegeben: Er setzt ein endliches Maß und die gleichmäßige Beschränktheit der f_n voraus; damit ist er in seiner Formulierung offenbar noch sehr nah beim Riemann-Integral, was 1902 der maßgebliche Integralbegriff war. (Inwiefern ist die von Lebesgue formulierte Aussage ein Spezialfall des oben genannten "Lebesgueschen Konvergenzsatzes"?) Die ersten beiden Aufgaben sollen verdeutlichen, welchen Fortschritt die genannten Konvergenzsätze gegenüber der Riemannschen Theorie bedeuten.

Aufgabe 1. Zeigen Sie am Beispiel der charakteristischen Funktion von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, dass weder der Satz von der monotonen Konvergenz noch der Lebesguesche Konvergenzsatz für das Riemann-Integral gilt.

[1] das zu wenig mehr als zum Beweis des Lebesgueschen Konvergenzsatzes brauchbar zu sein scheint, lediglich in *einem* späteren Beweis haben wir es in der Vorlesung verwendet - in welchem?

Der einzige Konvergenzsatz für das Riemann-Integral, den Sie üblicherweise in der Analysis I lernen, ist der folgende: Ist $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge (Riemann-)integrierbarer Funktionen, die *gleichmäßig* gegen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist auch f (Riemann-)integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Aufgabe 2. Erläutern Sie, dass der zuletzt genannte Satz aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz folgt, sofern man die Folgerung der Riemann-Integrierbarkeit zur Lebesgue-Integrierbarkeit abschwächt. Ist die Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz noch hinreichend für die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung, wenn man von $[a, b]$ zu $(0, \infty)$ oder zu $\mathbb{R}$ übergeht? (Vgl. Aufgabe 4 (c))

Einige konkrete Anwendungen des Lebesgueschen Konvergenzsatzes enthält die folgende

Aufgabe 3. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-x^n} dx,$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sin(x^n)}{x^2},$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$

Geben Sie auch eine integrierbare Majorante an.

Dass es ohne Majorante im Allgemeinen schief geht, zeigen die folgenden Beispiele:

Aufgabe 4. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n\chi_{(-1,1)}(nx)dx,$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + (x - n)^2} dx,$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}\chi_{(-1,1)}(\frac{x}{n})dx,$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{(0,n)} \frac{\sin(\frac{x}{n})}{x} dx.$

Beachten Sie, dass in allen Aufgabenteilen die Folge der Integranden fast überall gegen Null konvergiert.

Der Satz von der majorisierten Konvergenz ist ein wirklich oft benutzter Satz, allerdings weniger für solche konkreten Beispiele wie in Aufgabe 3, sondern vielmehr zum Beweis allgemeinerer Aussagen. Er erweist sich als sehr nẗzlich für die Untersuchung der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit von Funktionen, die als parameterabhängige Integrale definiert sind, wie z. B. die Γ-Funktion, vgl. das Tutorium vom 06.01.21. Ein weiteres Beispiel:

Aufgabe 5. Die Riemannsche Zeta-Funktion ist für $s > 1$ definiert durch

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Zeigen Sie, dass $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist und dass

$$\zeta^{(k)}(s) := (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n))^k \frac{1}{n^s}.$$

Bei manchen Stetigkeits- oder Differenzierbarkeitsuntersuchungen wird der Konvergenzsatz mit einem Approximationsargument verknüpft, wie in der folgenden

Aufgabe 6. Die Faltung zweier Funktionen f und g ist definiert als $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$, sofern dieses Integral existiert.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Lebesgueschen Konvergenzsatzes, dass $f * g$ stetig ist, wenn $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

(b) Nun seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ und $1 < p, p' < \infty$. Verwenden Sie die Dichtheit von $C_c(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ und die Aufgabe 6 vom Arbeitsblatt 1, um zu zeigen, dass $f * g$ auch unter dieser schwächeren Voraussetzung stetig ist.

Bei etwas fortgeschrittenen Anwendungen des Lebesgueschen Konvergenzsatzes besteht die Hauptschwierigkeit darin, eine geeignete integrierbare Majorante für die betrachtete Funktionenfolge zu finden. Das illustriert der folgende Beweis der Stirlingschen Formel. In Aufgabenteil (c) ist die Majorante gesucht - das größte Problem ist mit dem Hinweis allerdings bereits beseitigt.

Aufgabe 7. (Stirlingsche Formel) Für $y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$g_n(y) = \chi_{(-\sqrt{n},\infty)}(y) \exp\left(n(\ln(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}) - \frac{y}{\sqrt{n}})\right),$$

was für $y \leq -\sqrt{n}$ als $g_n(y) = 0$ zu lesen ist.

(a) Mit Hilfe der Substitution $y = \dfrac{x}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ zeige man

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(y)dy = \frac{e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \frac{e^n \Gamma(n+1)}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

(b) Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert $\lim_{n\to\infty} g_n(y)$.

(c) Bestimmen Sie eine integrierbare Majorante für die g_n. (Hinweis: Für $|x| < 1$ hat man $\ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{6}$, während für $x \geq 1$ gilt $\ln(1+x) - x \leq -\frac{x}{4}$. (Warum?))

(d) Folgern Sie mit Hilfe des Lebesgueschen Konvergenzsatzes die Stirlingsche Formel, das ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+1)e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}.$$

Besprechung: im "Ferientutorium" 15.03.-19.03.21