Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2020/21
02.03.2021
Blatt 1

FERIENTUTORIUM ZUR ANALYSIS III

Arbeitsblatt 1: L^p-Räume und Höldersche Ungleichung

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für $1 \leq p < \infty$ wurden in der Vorlesung die Vektorräume

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) := \{f : X \to \mathbb{C},\ f \text{ ist } \mathcal{A} \text{ - messbar und } \|f\|_p < \infty\}$$

definiert mit

$$\|f\|_p^p := \int |f|^p d\mu.$$

Abgeschlossen wird diese Skala von Funktionenräumen durch

$$\mathcal{L}^\infty := \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) := \{f : X \to \mathbb{C},\ f \text{ ist } \mathcal{A} \text{ - messbar und } \|f\|_\infty < \infty\},$$

wobei

$$\|f\|_\infty := \inf\{C > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > C\}) = 0\}.$$

Offenbar ist für $\lambda \in \mathbb{C}$ $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$ und $\|f\|_p \geq 0$ mit Gleichheit für $f = 0$. Es gilt die Dreiecksungleichung $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (auch Minkowski-Ungleichung genannt), die in der Vorlesung mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

gezeigt wurde. Die Höldersche Ungleichung gilt unter den Voraussetzungen $1 \leq p, p' \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Man nennt dann p' den zu p konjugierten Hölder-Exponenten. Aufgrund der genannten Eigenschaften ist $\| \quad \|_p$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$. Eine Norm liegt dann und *nur* dann vor, wenn es außer der leeren Menge keine μ-Nullmengen gibt (wie z.B. beim Zählmaß). Um (sozusagen mit Gewalt) einen normierten Vektorraum zu erhalten, setzt man

$$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^p : f = 0 \quad \mu \text{ - fast überall}\},$$

was ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p$ ist, und bildet den Quotientenvektorraum

$$L^p := L^p(X, \mathcal{A}, \mu) := \frac{\mathcal{L}^p}{\mathcal{N}}.$$

Dann ist $(L^p, \| \quad \|_p)$ ein normierter $\mathbb{C}$ - Vektorraum. Dieser ist vollständig (Satz von Fischer-Riesz), also ein *Banachraum*. Im Fall $p = 2$ stammt dessen Norm von einem

Skalarprodukt (welchem?), dann spricht man von einem *Hilbertraum*, und die Höldersche Ungleichung stimmt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung überein.

(Bis hierher alles klar? Wenn nicht: Lesen Sie weitere Einzelheiten in Abschnitt 2.7 der Vorlesung nach. Wenn ja, können Sie fortfahren.)

In der Zusatzaufgabe auf Blatt 11 haben Sie mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung für endliche Maßräume und unter der Voraussetzung $p \leq q$ die Abschätzung

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$$

gezeigt. (Erinnern Sie sich noch an den "Trick" dabei?) Da die L^p-Räume durch die Endlichkeit ihrer Normen definiert sind, bedeutet dies die Mengeninklusion $L^q \subset L^p$, wenn $p \leq q$. Sie können diese Ungleichung aber auch als die Lipschitzstetigkeit der linearen Einbettungsabbildung

$$J : L^q \to L^p, \quad f \mapsto Jf := f$$

lesen. Daher benutzt man an dieser Stelle häufig die Formulierung, L^q sei (für einen endlichen Maßraum und $p \leq q$!) stetig in L^p eingebettet oder "$L^q \subset L^p$ mit einer stetigen Einbettung". Zwischen L^p-Räumen bestehen solche stetigen Einbettungen nur unter stark einschränkenden Zusatzvorausetzungen (wie z.B. der Endlichkeit des Maßes). Ein schönes Beispiel dazu liefert die folgende

Aufgabe 1. Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu) = ((0, \infty), \mathcal{L}_1, \lambda_1)$, $1 \leq p < \infty$ und

$$f_p(x) := \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}(1 + |\ln(x)|)^{\frac{2}{p}}}.$$

Zeigen Sie, dass $f_p \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ aber $f_p \notin L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ für alle $q \in [1, \infty) \setminus \{p\}$.

Aufgabe 2. Finden Sie in Verallgemeinerung des Beispiels aus Aufgabe 1 eine rotationssymmetrische Funktion $g_p \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$, so dass $g_p \notin L^q(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ für alle $q \in [1, \infty) \setminus \{p\}$.

Die Höldersche Ungleichung ist eine *fundamentale Ungleichung*, mit deren Hilfe man viele Aussagen beweisen kann, darunter vor allem weitere Ungleichungen. (Nicht zu Unrecht bezeichnet Wolfgang Walter in seinem Lehrbuch die Höldersche Ungleichung als einen "workaholic" der Analysis.) Viele einfache Anwendungen der Hölderschen Ungleichung führen zur Aussage der logarithmischen Konvexität bestimmter Funktionen. Dabei heißt eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \supset I \to (0, \infty)$ logarithmisch konvex, wenn $\ln \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$ konvex ist, was wiederum gleichbedeutend ist mit

$$\varphi((1-\lambda)s + \lambda t) \leq \varphi(s)^{1-\lambda} \varphi(t)^{\lambda}$$

für alle $s, t \in I$ und $\lambda \in [0,1]$ (klar?). Im Tutorium vom 03.02.21 haben wir dies am Beispiel der Γ-Funktion auf $(0,\infty)$ gesehen. Ganz ähnlich funktioniert

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die ζ-Funktion

$$\zeta : (1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto \zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

logarithmisch konvex ist. (Welcher Maßraum ist hier involviert?)

Nur wenig schwieriger ist

Aufgabe 4. Es seien $1 \leq r < s < \infty$ und $0 \neq f \in L^r \cap L^s$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi : [r,s] \to (0,\infty), \quad p \mapsto \varphi(p) := \|f\|_p^p$$

logarithmisch konvex ist.

Die Ungleichung in Aufgabe 4 sieht der Lyapunoff-Ungleichung von Blatt 11 recht ähnlich (und tatsächlich sind beide gleichwertig, was aber schwieriger einzusehen ist, als beide zu beweisen). Das führt auf

Aufgabe 5. Finden Sie eine Funktion ψ, deren logarithmische Konvexität äquivalent ist zur Lyapunoff-Ungleichung. Welchen Definitionsbereich hat ψ?

Die geschickte Handhabung der Hölderschen Ungleichung in komplexeren Situationen bedarf einiger Übung - die Wahl der Hölder-Exponenten kann eine knifflige Angelegenheit werden. Ein Beispiel hierfür ist der elementare Beweis der Youngschen Ungleichung für Faltungen, das ist

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_q \|g\|_r$$

für Hölder-Exponenten p, q, r mit $\frac{1}{p'} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'}$, den Sie z. B. im kommenden Semester in meinem Seminar über Faltungen kennenlernen können. Hier beschränken wir uns auf zwei einfache Grenzfälle:

Aufgabe 6. Es seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ und $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$. Zeigen Sie, dass

$$|f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Wie haben wir in der Vorlesung argumentiert für den anderen Grenzfall der Youngschen Ungleichung, also die Abschätzung

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p,$$

wobei natürlich $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ vorausgesetzt war?

Anmerkung: Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ und $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ ist $f{*}g$ nicht nur beschränkt, sondern auch stetig. Den Beweis dieser Aussage verschieben wir auf ein Arbeitsblatt über Konvergenzsätze.

Manche Autoren (z.B. Hewitt/Stromberg, "Real and Abstract Analysis") betrachten auch L^p-Räume mit $p \in (0,1)$. In diesem Fall ist der Ausdruck

$$\|f\|^p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

keine Norm mehr, sondern lediglich eine Quasinorm, d.h. anstelle der Dreiecksungleichung hat man nur die schwächere

$$\|f+g\| \leq k(\|f\| + \|g\|).$$

(Für $\| \quad \| = \| \quad \|_p$, $p \in (0,1)$, kann man unabhängig vom Maßraum $k = 2^{\frac{1}{p}-1}$ erreichen, vgl. Hewitt/Stromberg, Exercise (13.25), das ist nicht sehr schwierig, lenkt aber hier nur vom Thema ab.) Auch hierfür gibt es eine - wenngleich etwas merkwürdige - Version der Hölderschen Ungleichung:

Aufgabe 7. Es seien $p \in (0,1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $f, g > 0$ $\mathcal{A}$-messbar, so dass $\int f^p d\mu < \infty$ und $\int g^{p'} d\mu < \infty$. (Beachten Sie, dass $p' < 0$ ist!). Zeigen Sie, dass

$$\int fg d\mu \geq \left(\int f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^{p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Tip: Setzen Sie $q = \frac{1}{p}$, $\varphi = g^{-\frac{1}{q}}$, $\psi = (fg)^{\frac{1}{q}}$ und wenden Sie die Höldersche Ungleichung an auf das Integral $\int \varphi\psi d\mu$.

Besprechung: im "Ferientutorium" 15.03.-19.03.21