

3.4 Der Satz von Picard-Lindelöf

P.L.
①

Wir untersuchen das Anfangswertproblem

$$y(x_0) = y_0 \quad (x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{K}^n)$$

für ein System gewöhnlicher Dgl. 1. Ordnung:

$$y_1'(x) = f_1(x, y(x))$$

⋮

⋮

$$, \text{ kurz: } y' = f(x, y)$$

$$y_n'(x) = f_n(x, y(x))$$

Differentialgleichung und Anfangsbed. zusammenfassen
werden wir im folgenden als Anfangswertproblem
bezeichnen, also:

$$y(x_0) = y_0, \quad y' = f(x, y) \quad (\text{AWP})$$

Von der rechten Seite sei zunächst nur voraus-
gesetzt, dass sie stetig sei, genauer:

$$f: I \times A \rightarrow \mathbb{K}^n \text{ stetig, dabei}$$

$$I \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall mit } x_0 \in I$$

$$A \subset \mathbb{K}^n \text{ abgeschlossen mit } y_0 \in A.$$

Ziel: Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung
 $y \in C^1(I, A)$ von (AWP) (sog. "globale Lösung",
existiert auf dem ganzen Intervall I) oder zu-
mindest einer "lokalen Lösung". D.h. es existiert
ein Teilintervall $I_0 \subset I$ mit $x_0 \in I_0$, so dass ^{es} genau
eine Lösung $y \in C^1(I_0, A)$ von (AWP) gibt.

Hilfssatz: Fixpunktsatz von Weierstraß.

Ist (X, d) vollständig metrisch, $F: X \rightarrow X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$d(F^k(x), F^k(y)) \leq \alpha_k d(x, y),$$

wobei $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty$ ist. Dann besitzt die Abbildung

F genau einen Fixpunkt (d.h. eine Lösung x_* der

$$\text{Gleichung } F(x_*) = x_*)$$

Auf welche Abbildung F läßt sich der Fixpunktsatz anwenden? Dazu müssen wir vom Anfangswertproblem (AWP) zur äquivalenten Integralgleichung übergehen:

Lemma: $y \in C^1(I, A)$ ist genau dann eine Lösung von (AWP), wenn für alle $x \in I$ gilt

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt =: F(y)(x) \quad (\text{Igl.})$$

Bew.: Integration der Dgl. in (AWP) von x_0 bis x

ergibt $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$. Mit der

Aufangsbed. $y(x_0) = y_0$ folgt (Igl.).

Umgekehrt: Ist $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$, so

ist $y(x_0) = y_0$ und nach dem Hauptsatz

$$y'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = f(x, y(x)). \quad \square$$

Bem.: Für die Implikation (Igl.) \Rightarrow (AWP) reicht

P.L.
③

offenbar die Voraussetzung $y \in C(I, A)$. Die stetige
Differenzierbarkeit ist dann eine Folgerung.

Um einen Fixpunkt der Abbildung

$$F : C(I, A) \rightarrow C(I, A), y \mapsto F(y)$$

(wie in (Igl.) definiert) zu konstruieren, nehmen
wir an, dass I kompakt ist, und versehen

$C(I, A)$ mit der Metrik

$$d(y, z) := \|y - z\| := \sup \{ |y(x) - z(x)| : x \in I \}.$$

Dann ist $(C(I, A), d)$ ein vollständiger metrischer

Raum (als abgeschlossener Teilraum von $C(I, \mathbb{K}^n)$).

Zum Nachweis der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes

ist die Stetigkeit der Funktionen f allein nicht aus-

reichend. Wir müssen darüber hinaus verlangen,

daß f der Lipschitz-Bedingung

$$\exists L > 0, \text{ so da\ss } |f(x, y) - f(x, z)| \leq L \|y - z\| \quad \forall x \in I, \quad y, z \in \mathbb{K}^n \quad (L)$$

genügt. Damit können wir zeigen:

Lemma 2: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall der

P.L.
(4)

Länge $|I|$, $A \subset \mathbb{K}^n$, $x_0 \in I$ und $y_0 \in A$. Die Funktion

$$f: I \times A \rightarrow \mathbb{K}^n$$

sei stetig, genüge der Lipschitzbedingung (L) und es gelte

$$F(y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \in A \quad \forall y \in C(I, A).$$

Dann ist $F: C(I, A) \rightarrow C(I, A)$ wohldefiniert und es gelten die Abschätzungen

$$|F^k(y)(x) - F^k(z)(x)| \leq L^k \frac{|I-x_0|^k}{k!} \|y-z\|$$

so wie

$$\|F^k(y) - F^k(z)\| \leq L^k \frac{|I|^k}{k!} \|y-z\|.$$

Bew.: (1) Wohldef.: Wg. $y(x) \in A \quad \forall x \in I$ ist $f(x, y(x))$

für $x \in I$ definiert und die Abbildung

$$x \mapsto f(x, y(x))$$

stetig. Also existiert $\int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$. Ferner:

$F(y)(x) \in A \quad \forall x \in I$ (nach Voraussetzung!) und

$$F(y)(x) - F(y)(x') = \int_x^{x'} f(t, y(t)) dt \rightarrow 0 \quad (x-x' \rightarrow 0)$$

Daher ist $F(y) \in C(I, A)$.

(2) Beweis der ersten Abschätzung (die zweite folgt daraus durch Supremumbildung): Induktion über k , wobei für $k=0$ nichts zu zeigen ist.

$$k \rightarrow k+1: |F^{k+1}(y)(x) - F^{k+1}(z)(x)|$$

$$= \left| \int_{x_0}^x f(t, F^k(y)(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, F^k(z)(t)) dt \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^x |f(t, F^k(y)(t)) - f(t, F^k(z)(t))| dt$$

$$\leq L \int_{x_0}^x |F^k(y)(t) - F^k(z)(t)| dt$$

$$\stackrel{I.V.}{\leq} L^{k+1} \int_{x_0}^x \frac{|t - x_0|^k}{k!} dt = L^{k+1} \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \|y - z\|. \quad \square$$

Zuerst wenden wir das Lemma mit $A = \mathbb{K}^n$ an.

Satz 1 (globaler Existenz- und Eindeigkeitsatz von Picard-Lindelöf). Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$. Die Funktion

$$f: I \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$$

sei stetig und genüge als Lipschitzbedingung (L) (für alle $x \in I, y, z \in \mathbb{K}^n$). Dann existiert genau eine Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ von (AWP).

Bew.: Die Voraussetzungen von Lemma 2, also

$$F(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \in \mathbb{K}^n$$

und (L) für alle $x \in I$, $y, z \in \mathbb{K}^n$, sind erfüllt.

Die Abbildung $F: C(I, \mathbb{K}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{K}^n)$

genügt also den Abschätzungen

$$\|F^k(y) - F^k(z)\| \leq \frac{(L|I|)^k}{k!} \|y - z\| \quad (k \in \mathbb{N}_0),$$

wobei $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L|I|)^k}{k!} = \exp(L|I|) < \infty$.

Da $C(I, \mathbb{K}^n)$ vollständig ist, existiert nach dem
FPS von Weierstraß genau eine Lösung $y \in C(I, \mathbb{K}^n)$
als Gleichung $y = F(y)$, also von Igl. Diese
löst (AWP) und ist stetig über (Lemma 1 und
Nachbemerkung). \square

Bem.: Ist die Funktion f im Satz 1 sogar auf
 $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ stetig und genügt auf jedem kompakten
Teilintervall $I \subset \mathbb{R}$ einer Lipschitzbedingung, so
existiert genau eine Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ von
(AWP). Dem Satz 1 liefert dann für jedes kom-
pakte Teilintervall eine Lösung, d.h.: y ist auf
ganz \mathbb{R} definiert.

Als Spezialfall ergibt sich der Existenz- und Eindeutigkeits-
satz für lineare Systeme 1. Ordnung, der in 3.2 bereits
verwendet wurde.

Satz 2: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{K}^n$,
 $P \in C(I, M_n(\mathbb{K}))$ und $Q \in C(I, \mathbb{K}^n)$. Dann besitzt das
Anfangswertproblem

$$y' = Py + Q, \quad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Bew.: Sei $f(x, y) = P(x)y + Q(x)$. Dann ist $f \in C(I \times \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$
und es gilt

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq \|P(x)\| |y - z| \leq \sup_{x \in I} \|P(x)\| |y - z|.$$

Der Wert $L := \sup_{x \in I} \|P(x)\|$ ist also die Lipschitzbed. (L)

für alle $x \in I, y, z \in \mathbb{K}^n$ erfüllt. Satz 1 liefert die

Behauptung. □

Folgerung: Sind $P \in C(I, M_n(\mathbb{K}))$, $Q \in C(I, \mathbb{K}^n)$ für
ein beliebiges Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so existiert eine
Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ des ANP $y' = Py + Q, y(x_0) = y_0$.
Diese ist eindeutig bestimmt.

Rem. + Bsp.: (1) Satz 1 findet auch bei einer Reihe
nichtlinearer Probleme Anwendung, nämlich immer
dann, wenn die rechte Seite einer globalen Lipschitz-
bedingung genügt. z.B. besitzt auch das ANP

Zwei Aspekte der Sätze 1 und 3 sollen abschließend noch anhand
von Beispielen diskutiert werden.

1. Die Lipschitzbedingung (L) ist notwendig für die Ein-
deutigkeit der Lösung.

Bsp. $y'(x) = |y(x)|^k, y(0) = 0 \quad (0 < x < 1)$

Hier ist die rechte Seite des Dgl. lediglich Hölder-stetig
zum Exponenten $k \in (0, 1)$, aber nicht mehr Lipschitz-
stetig. In diesem Fall geht die Eindeutigkeit der Lösung
des AHPs verloren!

1. $y(x) \equiv 0$ ist offenbar eine Lösung des Dgl., die auch der
Anfangsbedingung genügt.

2. Eine zweite, nichttriviale Lösung erhalten wir durch

Separation:

$$\begin{aligned} y'(x) = |y(x)|^k &\Rightarrow x = \int_0^x dx = \int_0^x \frac{y'(x)}{|y(x)|^k} dx \\ &= \int_0^{y(x)} y' |y|^{-k} dy = \frac{1}{1-k} y(x)^{1-k} \end{aligned}$$

falls $y \geq 0$

Für $x \geq 0$ ergibt die Auflösung nach y

$$y(x) = ((1-k)x)^{\frac{1}{1-k}}$$

3. Relativ viele weitere Lösungen erhält man jetzt durch
Stückeln: Für jedes $c \geq 0$ ist

$$y_c(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq c \\ ((1-k)(x-c))^{\frac{1}{1-k}} & ; x \geq c \end{cases}$$

eine Lösung des Dgl., die der Anfangsbedingung ge-
nügt.

2. Die Picard-Iteration

Zum Beweis des FPS von Weierstraß wird gezeigt, dass die Folge der Iterierten

$$(F^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}_0} = (x_0, F(x_0), F(F(x_0)), \dots)$$

für einen beliebigen Startpunkt $x_0 \in X$ konvergiert.

Wie sieht die Folge der Iterierten für unsere spezielle Abbildung

$$F: C(I, A) \rightarrow C(I, A), \quad F(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

aus? Dazu wählen wir als Startpunkt die besonders einfache Funktion

$$y_{(0)}(x) := y_0 \in \mathbb{R}, \text{ so da} \exists y_{(0)} \in C(I, A)$$

Dann ist

$$F(y_{(0)})(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{(0)}(t)) dt = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt =: y_{(1)}(x)$$

die erste Iterierte. Im nächsten Schritt haben wir

$$y_{(2)}(x) := F(y_{(1)})(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{(1)}(t)) dt,$$

allgemein also

$$y_{(k+1)}(x) := F(y_{(k)})(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{(k)}(t)) dt.$$

Dies liefert ein Verfahren zur Bestimmung von Näherungslösungen des AWP $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, das als Picard-Iteration bezeichnet wird.

Bsp.: Näherungslösung für die Riccati-Dgl.

$$y'(x) = x^2 + y(x)^2 \text{ mit Anfangswert } y(0) = 0.$$

Wir starten mit

$y_{(0)}(x) = y_0 = 0$ und haben als erste Näherung

$$y_{(1)}(x) = \underbrace{y_0}_{=0} + \int_{\underbrace{x_0=0}}^x t^2 + \underbrace{y_0^2}_{=0} dt = \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}.$$

Als nächstes erhalten wir (gleich mit $y_0 = x_0 = 0$!)

$$y_{(2)}(x) = \int_0^x t^2 + y_{(1)}(t)^2 dt = \int_0^x t^2 + \frac{t^6}{9} dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 \cdot 9}$$

Die dritte Näherung kann man gerade noch händisch

schaffen:

$$y_{(3)}(x) = \int_0^x t^2 + (y_{(2)}(t))^2 dt = \int_0^x t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{7 \cdot 9} \right)^2 dt$$
$$= \frac{t^6}{9} + \frac{2t^{10}}{3 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{t^{14}}{(7 \cdot 9)^2}$$

$$\Rightarrow y_{(3)}(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 \cdot 9} + \frac{2x^{11}}{3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{x^{15}}{(7 \cdot 9)^2 \cdot 15}$$

In diesem Fall erhalten wir nicht nur Näherungswerte, sondern erfahren auch etwas über die Struktur der Lösung. Diese ist in eine Potenzreihe entwickelbar,

$$\text{wobei } y(x) = \frac{x^3}{3} + x^3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^{4k} = \frac{x^3}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^{4k+3}.$$

Geht man damit in die Dgl. ein, erhält man

eine Rekursionsformel für die Koeffizienten α_k .

In besondres einfachen Fällen lässt sich die Lösung sogar anhand der ersten Wertes erraten! PL
14

Bsp.: $y'(x) = f(x) \quad y(x_0) = y_0$ (trivial!)

$$\Rightarrow y_{(0)}(x) = y_0, \quad y_{(1)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt = y_{(2)}(x) \quad \forall n \geq 2,$$

und das ist ja tatsächlich auch die Lösung. Hier ist man nach einer Integration bereits fertig.

Bsp.: $y'(x) = p(x) \cdot y(x)$ (homogene lineare Gleichung
erster Ordnung)

$$y(x_0) = y_0$$

Wir wissen: $y(x) = y_0 \cdot \exp(P(x))$, $P(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt$

ist die exakte Lösung. Führt uns die Picard-Iteration auch zu diesem Ergebnis?

$$y_{(0)}(x) = y_0; \quad y_{(1)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x y_0 p(t) dt = y_0 (1 + P(x))$$

$$y_{(2)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x p(t) y_{(1)}(t) dt = y_0 + y_0 \int_{x_0}^x p(t) + P(t)p(t) dt$$

$$= y_0 \left(1 + P(x) + \frac{P(x)^2}{2} \right)$$

Per Induktion kann man jetzt zeigen, daß

$$y_{(n)}(x) = y_0 \cdot \sum_{k=0}^n \frac{P(x)^k}{k!},$$

woraus sich im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ wieder das bekannte Ergebnis

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{(n)}(x) = y_0 \cdot \exp(P(x))$$

ergibt.

$y(x_0) = y_0$ für das nichtlineare Dgl.-System

$$y_i' = \sum_{k=1}^u f_{ik}(C_{ik} y_k) \quad (1 \leq i, k \leq u)$$

eine eindeutige globale Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^u)$. Denn für

$$f: \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^u, \text{ def. durch } f_i(y) = \sum_{k=1}^u f_{ik}(C_{ik} y_k) \text{ gilt}$$

die Abschätzung

$$|f(y) - f(z)| \leq \left(\sum_{i,k=1}^u C_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |y - z|,$$

wie wir in der Übung gezeigt haben. Also ist die Lipschitzbedingung hier für alle $x \in \mathbb{R}, y, z \in \mathbb{R}^u$ mit $L^2 = \sum_{i,k=1}^u C_{ik}^2$ erfüllt, und Satz 1 liefert die Beh...

(2) Bereits einfache Beispiele zeigen, dass wir keine globalen Lösungen erwarten können, wenn die Lipschitzbedingung nur lokal erfüllt ist (d.h. hier: für y, z aus einer kompakten Teilmenge von \mathbb{K}^u). Bsp.

$$y' = y^2; \quad y(0) = 1 \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ und } u = 1)$$

Hier ist $f(x, y) = y^2$. Diese Funktion ist Lipschitz-stetig auf kompakten Teilmengen von \mathbb{R} , aber nicht auf ganz \mathbb{R} . Das AWP ist durch Separation lösbar

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x)} dx = x + C \Rightarrow \frac{1}{y(x)} = -(x + C) \Rightarrow y(x) = \frac{-1}{x + C}$$

\Rightarrow $y(x) = \frac{1}{1-x}$. Die Lösung existiert nicht auf

ganz \mathbb{R} , sondern nur auf $(-\infty, 1)$.

Aus diesem Grund ist auch eine lokale Variante von Satz 1
von Interesse. Dazu wählen wir in Lemma 2:

$$A := \overline{B_R(y_0)} \quad (\text{mit einem beliebigen Radius } R)$$

und setzen

$$M := \sup \{ |f(x, y)| : x \in I, y \in A \}$$

so wie

$$h := \frac{R}{M} \quad (\text{Lebensdauer der Lösung}) \quad \text{und} \quad I_0 := [x_0 - h, x_0 + h] \cap I.$$

Diese Wahl ist so getroffen, daß für $y \in C(I_0, A)$ gilt

$$|F(y)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t))| dt$$

$$\leq |x - x_0| \cdot \sup \{ |f(x, y)| : x \in I, y \in A \} \in R \cdot h = R \quad \leftarrow \text{falls } x \in I_0!$$

Damit ist die in Lemma 2 zuletzt genannte Voraus-
setzung, nämlich: $F(y)(x) \in A \quad \forall x \in I_0, y \in C(I_0, A)$,
erfüllt. Wie im Beweis von Satz 1 erhält man:

Satz 3 (lokales Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-
Lindelöf): Es seien $y_0 \in \mathbb{K}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$ ein kom-
pattes Intervall. $f : I \times \overline{B_R(y_0)} \rightarrow \mathbb{K}^n$ sei stetig und
genüge auf $I \times \overline{B_R(y_0)}$ der Lipschitzbedingung (L).

Dann existiert genau eine Lösung $y \in C^1(I_0, \overline{B_R(y_0)})$
von (AWP).

Rem. zur Lebensdauer h (nicht exakt, da $I_0 = [x_0 - h, x_0 + h] \cap I$!)

PL
40

(i) h ist unabhängig von der Lipschitzkonstanten L
(um dies zu erreichen, haben wir den FPS von Weierstraß anstelle des Banachschen FPS verwendet !)

(ii) Mit $h = \frac{R}{H}$ ist die Lebensdauer der Lösung (oder zu-
mindest eine rechte Schranke hierfür) quantifiziert.
Hierbei ist allerdings

$$H = \sup \{ |f(x, y)| : x \in I, y \in \overline{B_R}(y_0) \} = H(R, I, y_0, x_0).$$

Um dem Satz eine möglichst große Lebensdauer zu ent-
nehmen, hat man im Einzelfall ggf. noch eine Opti-
mierungsaufgabe zu lösen (I und R sind ja wohl
wählbar !)

Bsp.: $y'(x) = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$ (also $x_0 = y_0 = 0 \in \mathbb{R}$)

Wir setzen $I = [-a, a]$ an und erhalten

$$H = \sup \{ x^2 + y^2 : |x| \leq a, |y| \leq R \} = a^2 + R^2,$$

also $h = \frac{R}{a^2 + R^2} =: h_a(R)$ (a fassen wir als Parameter
auf !)

Dann wird h_a extremal $\Leftrightarrow h_a'(R) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{a^2 + R^2} - \frac{2R^2}{(a^2 + R^2)^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow a = R$$

und dies ist tatsächlich ein Max. ($h_a(R) \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$
und $h_a(0) = 0$). Wählen wir also $a = R$, erhalten wir

$h = \frac{a}{2a^2} = \frac{1}{2a}$. Die tatsächliche Lebensdauer ergibt

sich dann zu $T = \text{wie}(a, \frac{1}{2a}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.