Bewertete Körper
Hausaufgabe 8

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei R ein Ring und $f(X) \in R[X]$. Zeige, dass es eine Polynom $H(X,Y) \in R[X,Y]$ existiert, sodass

$$f(X+Y) = f(X) + f'(X)Y + h(X,Y)Y^2.$$

Aufgabe 2. (2 Punkte) Zeige die Implikation (7) $\Rightarrow$ (6) von Satz 9.3.

Aufgabe 3. Sei p Primzahl mit $p > 2$. Wir schreiben $\mathbb{Z}_p$ für den Bewertungsring von $\mathbb{Q}_p$. Setze

$$(\mathbb{Z}_p^\times)^2 \coloneqq \{x \in \mathbb{Z}_p^\times : (\exists y)(x = y^2 \text{ und } y \in \mathbb{Z}_p^\times\}.$$

(1) (2 Punkte) Zeige, dass $(\mathbb{Z}_p^\times)^2$ eine offene Menge ist (Hinweis: falls $a \in (\mathbb{Z}_p^\times)^2$, gilt $B_0(a) \subseteq (\mathbb{Z}_p^\times)^2$, wobei $B_0(a) = \{x \in \mathbb{Z}_p : v(x-a) > 0\}$).
(2) (2 Punkte) Schließe daraus, dass $[\mathbb{Z}_p^\times : (\mathbb{Z}_p^\times)^2]$ endlich ist.
(3) (2 Punkte) Zeige, dass sich jedes Element in $\mathbb{Q}_p^*$ schreiben lässt als $p^n u$ mit für $n \in \mathbb{Z}$ und $u \in \mathbb{Z}_p^\times$. (Hinweis: Nutze Aufgabe 4 von Hausaufgabe 2).
(4) (2 Punkte) Schließe daraus, dass $[\mathbb{Q}_p^* : (\mathbb{Q}_p^*)^2]$ endlich ist, wobei

$$(\mathbb{Q}_p^*)^2 \coloneqq \{x \in \mathbb{Q}_p^2 : (\exists y \in \mathbb{Q}_p)(x = y^2)\}.$$

Aufgabe 4 (Krasnersatz)**.** (4 Punkte) Sei (K, v) ein henselscher bewerteter Körper. Seien $a, b \in K^{\text{alg}}$ (algebraischer Abschluß von K) und $a_2, \ldots, a_n \in K^{\text{alg}}$ die zu a konjugierten Elementen (wobei alle a_i jeweils von a verschieden sind). Zeige, dass $K(\alpha) \subseteq K(\beta)$ gilt, falls

$$v(a-b) > v(a-a_i) \text{ für } i = 2, \ldots, n\ .$$

(Hinweis: falls $c, c' \in K^{\text{alg}}$ Konjugiert über K sind, gilt $v_p(c) = v_p(c')$).

Aufgabe 5. Sei $p > 2$ Primzahl.

(1) (2 Punkte) Zeige, dass jede quadratische Erweiterung eines Körpers der Charakteristik ungleich 2 isomorph zum Zerfällungsköprper eines Polynomes der Form $x^2 - a$ ist.
(2) (2 Punkte) Schließe daraus, dass $\mathbb{Q}_p$ nur endlich viele (bis auf Isomorphie, oder in $\mathbb{Q}_p^{\text{alg}}$) quadratische Erweiterungen besitzt.

(Abgabe 08.06.22)