Bewertete Körper
Hausaufgabe 4

Definition. Sei $A \subseteq B$ eine Ringerweiterung. Wir sagen, dass ein Element $b \in B$ *integral über A* ist, falls es ein Polynom $P \in A[X]$

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$$

gibt so, dass $P(b) = 0$ gilt. Ein Element $b \in B$ *algebraisch über A* ist, falls es ein Polynom $P \in A[X]$ gibt so, dass $P(b) = 0$ gilt. Wir schreiben

$$\mathrm{icl}_B(A) \coloneqq \{b \in B : b \text{ integral über } A \text{ ist}\} \text{ und } \mathrm{acl}_B(A) \coloneqq \{b \in B : b \text{ algebraisch über } A \text{ ist}\}$$

für die *Ganzabschluss von A in B* und die *Algebraischabscluss von A in B*.

Sei A ein Integritätsbereich. Wir sagen, dass A *ganzabgeschlossen* ist, wenn $A = \mathrm{icl}_K(A)$ mit $K = \mathrm{Quot}(A)$.

Aufgabe 1. (6 Punkte)

(1) Sei A ein Hauptidealring. Zeigen, dass A ganzabgeschlossen ist. Welches Ringen sind ganzabgeschlossen: $\mathbb{Z}$, $K[X]$ (K ein Körper), $\mathbb{Z}[X]$?
(2) Sei A ein Integritätsbereich und K ein Körper, der A enthalten. Zeigen, dass $\mathrm{acl}_K(A)$ ein Körper ist.
(3) Schilßen daraus, dass $\mathrm{acl}_Q(\mathbb{Z}) \neq \mathrm{icl}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z})$.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Sei Γ eine nichttriviale Untergruppe von $(\mathbb{R}, +, <)$.

(1) Zeige, dass Γ dicht in $\mathbb{R}$ ist, falls $\Gamma \cap (0, 1)$ nichtleer für jedes $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist.
(2) Schließe daraus, dass entweder Γ dicht ist oder ein kleinstes positives Element besitzt.
(3) Ziege, dass Γ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, falls Γ ein kleinstes positives Element besitzt.

Aufgabe 3. (8 Punkte) Sei R ein Bewertungsring und $K = \mathrm{Quot}(R)$. Wit möchten zeigen, dass es eine angeordnete abelsche Gruppe Γ und eine Bewertung $v \colon K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ gibt so, dass $R = \mathcal{O}_v$.

(1) Sei $\leqslant$ die Relation auf $K^\times/R^\times$ so definiert
$$yR^\times \leqslant xR^\times \Leftrightarrow xy^{-1} \in R.$$
Zeigen, dass $(K^\times/R^\times, \leqslant)$ eine Totalordnung ist.
(2) Sei $\Gamma = K^\times/R^\times$. Wir verwenden die folgende additive Notation
$$xR^\times + yR^\times \coloneqq xyR^\times.$$
Zeigen, dass $(K^\times/R^\times, +, \leqslant, R^\times)$ eine angeordnete abelsche Gruppe ist (für die Ordnung wie in Teil (1) definiert).
(3) Zeigen, dass die Abbildung $v \colon K \to \Gamma \cup \{\infty\}$
$$x \mapsto \begin{cases} xR^\times & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$
eine Bewertung ist.
(4) Zeigen, dass $R = \mathcal{O}_v$.

(Abgabe 11.05.22)