Bewertete Körper

Hausaufgabe 11

Sei $(A, \leqslant)$ eine angeordnete Menge. Eine Folge $(a_\lambda)_{\lambda<\kappa}$ heißt steigend, falls $\mu < \lambda \Rightarrow a_\mu \leqslant a_\lambda$ für alle $\mu < \lambda < \kappa$. Sie heißt streng steigend, falls $i < j \Rightarrow a_i < a_j$. Entsprechende Definition für fallende und strenge fallende.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei $(A, \leqslant)$ eine angeordnete Menge. Zeige, dass A wohlgeordnet ist gdw, jede Folge von A eine steigende Teilfolge enthält.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei (K, v) ein bewertete Körper. Zeige, dass K vollständig ist gdw, jede Kette von Kugeln $\{B_{\gamma_\lambda}(a_\lambda) : \lambda < \kappa\}$, sodass $\{\gamma_\lambda : \lambda < \kappa\}$ kofinal in Γ ist, erfüllt: $\bigcap_{\lambda<\kappa} B_{\gamma_\lambda}(a_\lambda) \neq \emptyset$.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $(K, v) \subseteq (L, w)$ eine Erweiterung bewertete Körper. Sei $a \in L$. Zeige, dass ein $b \in K$ existiert, sodass $v(a - b) > 0$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Zeige, dass der bewertete Körper $k((t^\Gamma))$ Spherischvollständig ist.

Hinweis: Sei $\{B_{\gamma_\lambda}(a_\lambda) : \lambda < \kappa\}$ eine strenge Kette (κ beliebige Kardinalzahl). Schreibe $a_\lambda = \sum_{\delta\in\Gamma} c_\delta^\lambda t^\delta$. Zeige, dass für $\lambda < \mu < \kappa$ gilt

$$c_\delta^\lambda = c_\delta^\mu \text{ für } \delta \leqslant \gamma_\lambda.$$

Setze $c = \sum_{\delta\in\Gamma} c_\delta t^\delta$ mit

$$c_\delta = \begin{cases} c_\delta^\mu & \text{falls } \delta \leqslant \gamma_\mu \text{ für } \mu < \kappa \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Element c_δ ist dann Wohldefiniert.

Zeige, dass c gehört zu $\bigcap_{\lambda<\kappa} B_{\gamma_\lambda}(a_\lambda)$. Nutze, dass die Menge $\{\lambda : \lambda < \kappa\}$ Wohlgeordnet ist.

Aufgabe 5. (4 Punkte) Zeige, dass der Restklasskörper von $K = k((t^\Gamma))$ isomorph zu k ist.

(Abgabe 29.06.22)