Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

Rüdiger W. Braun

Wintersemester 2013/14

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines

Wiederholung. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^{|\alpha|}(U)$. Dann bezeichnet man mit $D^\alpha u$ die partielle Ableitung

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

1.1 Bezeichnung. Häufig hat man es mit den drei Raumvariablen x, y, z und der Zeitvariable t zu tun. Dann drückt man partielle Ableitungen nach einer dieser Variablen dadurch aus, dass man die Variable als Index an die Funktion setzt.

Beispielsweise ist der *Laplace-Operator* in n Variablen definiert als

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

In drei Raumdimensionen schreibt man ihn

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

1.2 Definition. Eine *partielle Differentialgleichung* der Ordnung k ist eine Gleichung der Form

$$F\Big(D^{\alpha^{(1)}} u(x), \ldots, D^{\alpha^{(N)}} u(x), x\Big) = 0,$$

wobei F eine Funktion in $N + 1$ Veränderlichen ist und $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(N)}$ Multiindices sind mit $\max_{j=1,\ldots,N} |\alpha^{(j)}| = k$. Die Funktion u ist die gesuchte Lösung. Wir fordern (vorerst), dass u von der Klasse C^k ist.

Eine System von endlich vielen partiellen Differentialgleichungen bezeichnet man als partielles Differentialgleichungssystem.

Die Theorie wird umso schwieriger, je nichtlinearer eine partielle Differentialgleichung ist. Man unterscheidet die folgenden Typen:

1.3 Bezeichnung. (a) Eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x)$$

heißt *linear*. Im Fall $f \equiv 0$ heißt sie *homogen linear*,, ansonsten bezeichnet man f als *Inhomogenität* der Differentialgleichung.

(b) Eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + a_0\Big(D^{\beta^{(1)}}u(x), \dots, D^{\beta^{(N)}}u(x), x\Big) = 0$$

heißt *semilinear*, vorausgesetzt $|\beta^{(j)}| < k$ for alle j.

(c) Eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\Big(D^{\beta_\alpha^{(1)}}u(x), \dots, D^{\beta_\alpha^{(N\alpha)}}u(x), x\Big)\, D^\alpha u + a_0\Big(D^{\gamma^{(1)}}u(x), \dots, D^{\gamma^{(N)}}u(x), x\Big) = 0$$

heit *quasilinear*, vorausgesetzt alle $|\beta_\alpha^{(j)}| < k$ und alle $|\gamma^{(j)}| < k$.

(d) Alle anderen partiellen Differentialgleichungen bezeichnet man als *voll nichtlinear.*

1.4 Beispiel. (a) Die *Transportgleichung* lautet

$$u_t + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} = 0,$$

wobei $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ (also konstant) sind.

(b) Die *Laplace-Gleichung* lautet

$$\Delta u = 0.$$

(c) Die *Wärmeleitungsgleichung* (engl. *heat equation*) lautet

$$u_t - \Delta u = 0.$$

Die Wärmeleitungsgleichung wird auch Diffusionsgleichung genannt.

(d) Die Wellengleichung lautet

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

Die Differentialgleichungen (a)–(d) sind linear mit konstanten Koeffizienten. (a) ist von erster Ordnung, (b)–(d) von zweiter.

(e) Die *Zakharov-Kuznetsov Gleichung* lautet

$$u_t + \alpha(t) u\, u_x + \beta(t) u_{xxx} + \gamma(t) u_{xyy} = 0.$$

Diese Gleichung ist semilinear von dritter Ordnung.

(f) Die *Navier-Stokes Gleichungen* lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t), \qquad i = 1,2,3, \\ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0. \end{aligned}$$

Es handelt sich um ein semilineares partielles Differentialgleichungssystem. Gesucht sind dabei u_1, u_2, u_3 und p. Ferner ist $\nu > 0$ eine vorgegebene Konstante und die f_i sind Funktionen. Eine offene Frage ist, ob das Differentialgleichungssystem Lösungen besitzt, die nur auf einem endlichen Intervall $(0, T)$ existieren. Diese Frage ist ein Clay Millenium Problem (http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/).

2 Die Transportgleichung

Bei der Transportgleichung in unserem Sinn handelt es sich um

$$u_t + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \tag{2.1}$$

wobei $b \in \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $u \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$ gesucht wird.

Der Name Transportgleichung stammt aus dem Buch von Evans. Es handelt sich um die Boltzmannsche Transportgleichung ohne Teilchenkollision.

2.1 Beispiel. $u_t + u_x = 0$ führt man durch die Substitution $y = x + t$, $z = x - t$ auf die Differentialgleichung $v_y = 0$ zurück, wobei $v(y, z) = u\left(\frac{1}{2}(y+z), \frac{1}{2}(y-z)\right)$. Also ist die Lösung von der Form $u(x, t) = w(x - t)$ für eine C^1-Funktion w.

2.2 Satz. *Die C^1-Lösungen von (2.1) auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ sind genau die Funktionen der Form*

$$u(x, t) = w(x - tb),$$

wobei $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

2.3 Bemerkung. Eine Aufgabe der Form

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} &= f && \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

bezeichnet man als *Anfangswertproblem.* Dabei ist die zweite Zeile zu verstehen als

$$\lim_{t \searrow 0} u(x, t) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Im Fall der homogenen Gleichung, also für $f \equiv 0$, haben wir im Satz gesehen, dass $u(x, t) = g(x - bt)$ die einzige Lösung des Anfangswertproblems ist.

Zur Lösung gehen wir vor wie im Beweis von Satz 2.2. Setze $f\varphi(s) = u(x+sb, t+s)$, $s > 0$. Dann $\varphi'(s) = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial t} = f(x + sb, t + s)$. Also

$$\begin{aligned} u(x, t) - g(x - tb) &= u(x, t) - u(x - tb, 0) \\ &= \int_{-t}^{0} f(x + sb, t + s) ds = \int_{0}^{t} f(x + (s - t)b, s) ds. \end{aligned}$$

Wir haben die folgende Integralformel für die Lösung des Anfangswertproblems erhalten

$$u(x,t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s - t)b), s)ds.$$

3 Die Laplace-Gleichung

Motivation. u sei die Wärme in einem Gebiet U. Am Rand des Gebietes liegt eine unveränderliche Wärmeverteilung f vor. Es habe sich eine stationäre, also zeitunabhängige Lösung eingestellt. Dann löst u das folgende *Randwertproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } U, \\ u &= f && \text{in } \partial U. \end{aligned}$$

3.1 Definition. Die partielle Differentialgleichung $\Delta u = 0$ heißt *Laplace-Gleichung*, die zugehörige inhomogene Gleichung $-\Delta u = f$ heißt *Poisson-Gleichung*. Die Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ bezeichnet man als *harmonische Funktionen.*

Bemerkung. (a) Wir hatten in der Funktionentheorie gesehen, dass Real- und Imaginärteil von holomorphen Funktionen harmonisch sind.

(b) Das Vorzeichen bei der Poisson-Gleichung wird gewählt, weil der Operator $-\Delta$ positiv im Sinne der Funktionalanalysis ist. (D. h. alle seine Eigenwerte sind ≥ 0.)

Wir beginnen mit $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und suchen radialsymmetrische Lösungen der Laplace-Gleichung.

3.2 Bemerkung. Gesucht Lösung u von $\Delta u = 0$ der Form $u(x) = v(|x|)$. Beachte

$$\frac{\partial |x|}{\partial x_j} = \frac{2x_j}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_j}{|x|}.$$

Also

$$\frac{\partial u}{x_j} = v'(|x|)\frac{x_j}{|x|}$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{x_j^2} = v''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + v'(|x|)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right).$$

Damit erhalten wir

$$\Delta u(x) = v''(|x|) + v'(|x|)\frac{n-1}{|x|}.$$

Daher ist u genau dann in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine Lösung der Laplace-Gleichung, wenn

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0.$$

Das ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung in v''. Wir erhalten

$$v(r) = \begin{cases} C_1 \ln r + C_2, & n = 2, \\ \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2, & n \geq 3. \end{cases}$$

3.3 Definition. Die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln(|x|), & n = 2, \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

ist die *Fundamentallösung* der Laplace-Gleichung in n-Dimensionen. Hierbei ist $\alpha(n)$ das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Aus der Analysis III wissen wir $\alpha(3) = \frac{4}{3}\pi$.

Die Wahl der Vorfaktoren wird nachher einsichtig. Die Fundamentallösung ist harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Um mit den Fundamentallösungen zu arbeiten, leiten wir wir die Greenschen Formeln aus dem Gaußschen Integralsatz (Analysis III, Theorem 18.5) her.

Wir wiederholen den Integralsatz von Gauß aus der Analysis III. Er war dort Theorem 18.5.

3.4 Wiederholung. Eine k-*Form* auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung der Form

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \tag{3.1}$$

wobei die Funktionen $f_{i_1,\ldots,i_k} : U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^∞ sind. Die Verknüpfung $\wedge$ ist bilinear, assoziativ und erfüllt das folgende Kommutativgesetz

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i,$$

insbesondere ist $dx_i \wedge dx_i = 0$ für alle i. Die *äußere Ableitung* einer Funktion f ist ihr Gradient, geschrieben als 1-Form

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Die äußere Ableitung der k-Form ω aus (3.1) ist die $(k+1)$-Form

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

3.5 Theorem (Integralsatz von Gauß). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$ eine glatte $(n-1)$-Form auf U. Sei ferner $X \subset U$ kompakt mit $\overline{\mathring{X}} = X$, so dass ihr Rand ∂X eine $(n-1)$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit ist. Dann gilt*

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega.$$

Für Leute, die noch nicht in der Analysis III waren, gebe ich den Satz für $n = 3$ in der klassischen Formulierung an (Theorem 19.12 der Analysis III).

3.6 Theorem (Divergenzsatz). *Sei* U *offen im* $\mathbb{R}^3$, *sei* $X \subset U$ *eine kompakte, dreidimensionale Untermannigfaltigkeit und sei* $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ *ein glattes Vektorfeld. Sei* ν *das nach außen gerichtete Einheitsnormalenfeld auf* ∂X. *Dann*

$$\int_X \operatorname{div}(F)\, d\lambda^3 = \int_{\partial X} \langle F, \nu\rangle\, d\lambda_{\partial X}.$$

3.7 Beispiel. Sei $\omega = \sum_{j=1}^n x_j(-1)^{j-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$. Dann $d\omega = n\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ und daher

$$\int_{S^{n-1}} \omega = n \int_{\overline{B_1(0)}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = n\alpha(n).$$

Unser erstes Ziel sind die Greenschen Formeln. Es handelt sich um die mehrdimensionale Variante der folgenden partiellen Integration

$$f'(b)g(b) - f'(a)g(a) - \int_a^b f''g = \int_a^b f'g' = f(b)g'(b) - f(a)g'(a) - \int_a^b fg'',$$

wobei die zweiten Ableitungen durch den Laplace-Operator und die ersten durch den Gradienten ersetzt werden.

3.8 Satz (Greensche Formeln). *Sei* U *offen im* $\mathbb{R}^n$, *sei* $X \subset U$ *eine kompakte* n*-dimensionale, berandete Untermannigfaltigkeit. Seien* $f, g \in C^2(U)$. *Dann*

(a)

$$\int_X f\Delta g\, d\lambda_n = -\int_X \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} d\lambda_n - \int_{\partial X} \sum_{j=1}^n (-1)^j f \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

(b)

$$\int_X (f\Delta g - g\Delta f) d\lambda_n = \int_{\partial X} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \left(f\frac{\partial g}{\partial x_j} - g\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Bemerkung. In der Analysis III haben wir aus Bequemlichkeit nur glatte Differentialformen zugelassen. Für den Satz von Stokes und entsprechend den Gaußschen Integralsatz genügen aber C^1-Formen. Das wird beispielsweise in Forster, Analysis III, so gemacht.

3.9 Definition. Für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichnet man $\operatorname{Supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}$ als *Träger* von f. Mit $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet man den Raum aller Funktionen von der Klasse k, deren Träger kompakt ist.

3.10 Korollar. *Für* $f, g \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ *gelten*

(a)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\Delta g \, d\lambda_n = -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} d\lambda_n.$$

(b)

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f\Delta g - g\Delta f) d\lambda_n = 0.$$

3.11 Bezeichnung. $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}$ ist die r-Kugel um x.

3.12 Lemma. *Sei* Φ *die Fundamentallösung des Laplace-Operators in* n *Veränderlichen und sei* $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. *Dann gelten*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B_\epsilon(0)} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial y_j}(x - y) dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_j} \wedge \cdots \wedge dy_n = 0$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B_\epsilon(0)} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f(x - y) \frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(y) dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_j} \wedge \cdots \wedge dy_n = -f(x).$$

3.13 Theorem. *Sei* $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. *Für* $x \in \mathbb{R}^n$ *setze*

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \ln|x - y| f(y) \, d\lambda_2(y), & n = 2, \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}} d\lambda_n(y), & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *und* u *löst die Poisson-Gleichung*

$$-\Delta u = f.$$

4 Die Mittelwertseigenschaft

Ich wiederhole den Begriff des Oberflächenmasses aus der Analysis III.

4.1 Definition (Analysis III, 17.10). Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n-dimensionale, orientierte Untermannigfaltigkeit, sei $T \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $P \subset T$ kompakt und sei $\varphi\colon T \to M$ glatt. Wir bezeichnen φ als *Parametrisierung* von M, wenn

(a) $\varphi(P) = M$.

(b) Die Einschränkung $\varphi\colon \mathring{P} \to M$ ist eine positiv orientierte Karte von M.

(c) $\lambda_n(\partial P) = 0$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

4.2 Satz (Analysis III, 19.9). *Es gibt ein Borelmaß* λ_M *auf* M*, so dass für jede* λ_M*-integrierbare Funktion* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *gilt*

$$\int f \, d\lambda_M = \int_P (f \circ \varphi)\sqrt{\det((D\varphi)^T D\varphi)} d\lambda^n.$$

Wenn die Mannigfaltigkeit M klar ist, sieht man in der Literatur häufig $d\sigma$ statt $d\lambda_M$.

Bei der Berechnung von $\det((D\varphi)^T D\varphi)$ hilft der Satz von Binet-Cauchy (Korollar 3.14 der LA II von Herrn Köhler).

4.3 Satz (Binet-Cauchy). *Für* $A \in K^{n\times m}$ *und* $B \in K^{m\times n}$ *und* $n \le m$ *ist*

$$\det(AB) = \sum_{\substack{L \subset 1,\ldots,m \\ |L|=n}} \det\left((a_{j,\ell})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ \ell \in L}} \right) \det\left((b_{\ell,j})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ \ell \in L}} \right).$$

4.4 Beispiel. Die n-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset R^{n+1}$ sei ein Graph, besitze also eine Parametrisierung der Form $\varphi\colon P \to M$, $\varphi(t) = (\psi(t), t)$ mit $\psi\colon T \to \mathbb{R}$. Man sieht unter Verwendung des Satzes von Binet-Cauchy

$$\det((D\varphi)^T D\varphi) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t_j}\right)^2 = 1 + \|\nabla\psi\|_2^2.$$

4.5 Satz (Abstrakte Polarkoordinaten). *Seien* $r > 0$ *und* $x \subset \mathbb{R}^{n+1}$. *Für jede integrierbare Funktion* $f\colon B_r(x) \to \mathbb{R}$ *gilt*

$$\int_{B_r(x)} f \, d\lambda_{n+1} = \int_0^r \int_{\partial B_s(x)} f \, d\sigma \, d\lambda_1(s).$$

4.6 Bezeichnung. Der Normalenraum $N_a(M)$ an eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^{n+1}$ im Punkt a ist derjenige Untervektorraum des $\mathbb{R}^{n+1}$, der auf allen Elementen des Tangentialraums $T_a(M)$ senkrecht steht. Er ist eindimensional. Wenn φ eine Parametrisierung wie oben ist, dann ist ν genau dann ein Normalenvektor, wenn er senkrecht auf allen Vektoren $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_j}, \dots, \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial t_j}\right)$, $j = 1, \dots, n$, sind. Wenn M der Rand von X ist, dann ist die *äußere Einheitsnormale* derjenige Normalenvektor ν der Länge 1, der nach außen zeigt (für den also $a + t\nu \notin X$ für alle kleinen $t > 0$).

4.7 Lemma. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *offen, sei* $F\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ *von der Klasse* C^1 *und setze*

$$\omega = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} F_j \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}.$$

Sei $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *eine* $(n+1)$*-dimensionale, kompakte, berandete Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^{n+1}$ *und sei* ν *das äußere Einheitsnormalenvektorfeld an* ∂X. *Dann*

$$\int_{\partial X} \omega = \int_{\partial X} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma,$$

wobei $\langle F, \nu \rangle = \sum_{j=1}^{n+1} F_j \nu_j$.

4.8 Definition. Wir sagen, eine beschränkte, offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei *glatt berandet*, wenn $\overline{U}$ eine abgeschlossene, berandete, n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

Wiederholung. Das bedeutet, dass es zu jedem $a \in \partial U$ einen Diffeomorphismus $\varphi\colon W \to V$ von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass

(a) $a \in V$,

(b) $\varphi(\{x \in W \mid x_1 \leq 0\}) = \overline{U} \cap V$,

(c) $\varphi(\{x \in W \mid x_1 = 0\}) = \partial U \cap V$.

4.9 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $k \in \mathbb{N}_0$. Eine Funktion $f \in C(\overline{U})$ liegt in $C^k(\overline{U})$, wenn ihre Einschränkung $\widetilde{f} = f|_U$ in $C^k(U)$ liegt und alle Ableitungen $D^\alpha \widetilde{f}$ mit $|\alpha| \leq k$ eine stetige Fortsetzung nach $\overline{U}$ besitzen. Eine Abbildung liegt in $C^k(\overline{U}, \mathbb{R}^m)$, wenn alle Komponenten in $C^k(\overline{U})$ liegen.

4.10 Theorem (Divergenzsatz). *Sei* U *im* $\mathbb{R}^n$ *glatt berandet und sei* $F \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$. *Sei* ν *das nach außen gerichtete Einheitsnormalenfeld auf* ∂U *und sei* $d\sigma$ *das Oberflächenmaß auf* ∂U. *Dann*

$$\int_U \operatorname{div}(F)\, d\lambda^n = \int_{\partial U} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma.$$

Damit sehen die Greenschen Formeln wie folgt aus. Wir verwenden dann auch noch gleich den Nabla-Operator $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

4.11 Theorem. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt und offen mit glattem Rand. Seien* $f, g \in C^2(\overline{U})$. *Dann*

(a)

$$\int_U f\, \Delta g \, d\lambda_n = -\int_U \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, d\lambda_n - \int_{\partial U} f \, \langle \nabla g, \nu \rangle \, d\sigma.$$

(b)

$$\int_U (f\, \Delta g - g\, \Delta f) d\lambda_n = \int_{\partial U} (f\, \langle \nabla g, \nu \rangle - g\, \langle \nabla f, \nu \rangle)\, d\sigma.$$

Beachtet man, dass $\langle \nabla f, \nu \rangle$ die Richtungsableitung von f in Richtung ν ist, so kann man auf den rechten Seiten die Skalarprodukte durch Richtungsableitungen ersetzen.

Beachte, dass $n\alpha(n)$ das Maß der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$ ist, also $n\alpha(n) = \int_{S^{n-1}} d\sigma$.

4.12 Theorem (Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $u \colon U \to \mathbb{R}$ *harmonisch. Ferner sei* $\overline{B}_r(x) \subset U$. *Dann*

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1} n\alpha(n)} \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma$$

und

$$u(x) = \frac{1}{r^n \alpha(n)} \int_{B_r(x)} u \, d\lambda_n.$$

4.13 Satz. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $u \in C^2(U)$. *Falls* u *die Mittelwerteigenschaft*

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1} n\alpha(n)} \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma$$

besitzt, so ist u *harmonisch.*

Wiederholung. Ein metrischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es in ihm höchstens zwei Mengen gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind (nämlich $\emptyset$ und X).

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $M \subset X$ ist genau dann offen in X, wenn es eine offene Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $M = G \cap X$, und M ist genau dann abgeschlossen in X, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $M = A \cap X$.

4.14 Theorem (Starkes Maximumprinzip). *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen, beschränkt und zusammenhängend. Es sei* $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ *harmonisch in* U *(d. h.* $\Delta u(x) = 0$ *für alle* $x \in U$*). Falls es ein* $x_0 \in U$ *gibt, so dass* $u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$*, so ist* u *konstant.*

4.15 Korollar. *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt und es sei* $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ *harmonisch in* U*. Dann nimmt* u *ihr Maximum in* ∂U *an.*

Die beiden Formulierungen des Maximumprinzips gelten auch, wenn man Maximum durch Minimum erstetzt.

4.16 Bezeichnung. Das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, && \text{in } U, \\ u &= g, && \text{in } \partial U. \end{aligned}$$

heißt *Randwertproblem.*

4.17 Satz. *Für beschränktes, offenes* U *gibt es höchstens eine Lösung* u *des Randwertproblems 4.16.*

4.18 Bemerkung. Wie in Bemerkung 13.8 der Analysis I zeigt man, dass die Funktion

$$\eta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

von der Klasse C^∞ ist. Dabei wird C so gewählt, dass $\int_{\mathbb{R}^n} = 1$. Für $\epsilon > 0$ setzt man

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Dann $\eta_\epsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{Supp}(\eta_\epsilon) = \overline{B}_\epsilon(0)$, $\eta_\epsilon(x) \geq 0$ für alle x und $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon d\lambda_n = 1$.

4.19 Satz. *Sei* U *offen im* $\mathbb{R}^n$ *und sei* u *harmonisch in* U*. Dann* $u \in C^\infty(U)$.

5 Greensche Funktion

Wir wollen das Randwertproblem 4.16 mittels der Fundamentallösung Φ lösen. Nach Theorem 3.13 wird für $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung u der Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ gegeben durch $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\Phi(y-x)d\lambda_n(y)$.

5.1 Bemerkung. Zum Üben machen wir das mal in einer Veränderlichen. Wir setzen $\Phi(y) = -\frac{1}{2}|y|$. Gegeben sei nun $f \in C_c^2(\mathbb{R})$. Wir setzen $u(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(y-x)f(y)dy$ und zeigen $u'' = -f$. Dazu setzen wir $F_{1,-}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $F_{1,+}(x) = -\int_{x}^{\infty} f(t)dt$, $F_{2,-}(x) = \int_{-\infty}^{x} F_{1,-}(t)dt$ und $F_{2,+}(x) = -\int_{x}^{\infty} F_{1,+}(t)dt$. Dann $F_{2,\pm}'' = f$ und

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}(y-x)f(y)dy - \frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}(y-x)f(y)dy \\
&= \frac{1}{2}(y-x)F_{1,-}(y)\Big|_{-\infty}^{x} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} F_{1,-}(y)dy - \frac{1}{2}(y-x)F_{1,+}(y)\Big|_{x}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{x}^{\infty} F_{1,+}(t)dt \\
&= -\frac{1}{2}F_{2,-}(y)\Big|_{-\infty}^{x} + \frac{1}{2}F_{2,+}(y)\Big|_{x}^{\infty} \\
&= -\frac{1}{2}F_{2,-}(x) - \frac{1}{2}F_{2,+}(x).
\end{aligned}$$

Das Argument funktioniert sogar für $f \in C_c(\mathbb{R})$. Das liegt daran, dass wir ohne die Greensche Formel ausgekommen sind.

5.2 Lemma. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $u \in C^2(U)$. *Dann gilt für alle* $x \in U$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y) \langle \nabla_y \Phi(y-x), \nu \rangle \, d\sigma(y) = -u(x).$$

Wir zeigen zuerst eine Variante von Theorem 3.13 mit Rand.

5.3 Satz. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt mit glattem Rand. Für* $u \in C^2(\overline{U})$ *gilt für alle* $x \in U$

$$u(x) = \int_{\partial U} \left(\Phi(y-x)\langle \nabla u, \nu\rangle - u(y)\langle \nabla_y \Phi(y-x), \nu\rangle\right) d\sigma(y) \\ - \int_U \Phi(y-x)\Delta u(y) d\lambda_n(y).$$

5.4 Definition. Ein *Gebiet* ist eine offene, zusammenhängende Menge im $\mathbb{R}^n$.

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Falls für jedes $x \in U$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^x(y) &= 0 && \text{in } U \\ \varphi^x(y) &= \Phi(y-x) && \text{in } \partial U \end{aligned}$$

eine Lösung $\varphi^x \in C^1(\overline{U}) \cap C^2(U)$ besitzt, so bezeichnet man die Funktion

$$G\colon \{(x,y) \in U^2 \mid x \neq y\} \to \mathbb{R}, \qquad G(x,y) = \Phi(y-x) - \varphi^x(y)$$

als *Greensche Funktion* von U.

5.5 Satz. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, welches eine Greensche Funktion* G *besitzt. Ferner sei* $u \in C^2(\overline{U})$ *eine Lösung des Randwert-problems*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \textit{in } U \\ u &= g && \textit{in } \partial U. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in U$

$$u(x) = -\int_{\partial U} g(y)\,\langle \nabla_y G(x,y), \nu\rangle\, d\sigma(y) + \int_U G(x,y) f(y) d\lambda_n(y).$$

5.6 Satz (Symmetrie der Greenschen Funktion). *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, welches eine Greensche Funktion* G *besitzt. Dann gilt* $G(x,y) = G(y,x)$ *für alle* $x, y \in U$ *mit* $x \neq y$.

5.7 Bemerkung. Der *Halbraum* ist $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$. Die *Spiegelung* am Rand bildet $x \in \mathbb{R}^n_+$ ab auf $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$. Damit lässt sich leicht eine Funktion $\varphi^x\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ finden mit

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^x(y) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ \varphi^x(y) &= \Phi(y-x) && \text{in } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

nämlich $\varphi^x(y) - \Phi(y - \widetilde{x})$.

5.8 Bezeichnung. Die *Spiegelung an der Einheitssphäre* bildet $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ab auf

$$\widetilde{x} = \frac{x}{|x|^2}.$$

5.9 Satz. *Die Greensche Funktion der Einheitskugel ist*

$$G(x,y) = \begin{cases} \Phi(x-y) - \Phi\big(|x|(y-\widetilde{x})\big), & x \neq 0, \\ \Phi(y) - \Phi(1, 0, \ldots, 0), & x = 0. \end{cases}$$

5.10 Definition. Seien $n \geq 2$ und $r > 0$. Die Funktion

$$K(x,y) = \frac{r^2 - |x|^2}{rn\alpha(n)|x-y|^n}, \qquad x \in B_r(0) \subset \mathbb{R}^n, y \in \partial B_r(0) \subset \mathbb{R}^n, \tag{5.1}$$

heißt *Poisson-Kern* für die n-dimensionale Einheitskugel.

Bemerkung. Beachte $2\alpha(2) = 2\pi$.

5.11 Lemma. *Für $n \geq 2$, $x \in B_1(0)$, $y \in \partial B_1(0)$ und ν die äußere Einheitsnormale an $B_1(0)$ in y gilt*

$$\langle \nabla_y G(x,y), \nu \rangle = -K(x,y).$$

Der Poisson-Kern ist harmonisch in $B_1(0)$ bezüglich der Variablen x.

5.12 Theorem (Poissonsche Formel für die Kugel). *Es seien $n \geq 2$ und $r > 0$ und es sei K wie in (5.1). Für $g \in C(\partial B_r(0))$ setze*

$$u(x) = \int_{\partial B_r(0)} g(y) K(x,y) d\sigma(y).$$

Dann löst u das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \textit{in } B_r(0) \\ u &= g && \textit{in } \partial B_r(0) \end{aligned}$$

Bemerkung. (a) Ein Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{in } U \\ u &= g && \text{in } \partial U \end{aligned}$$

bezeichnet man als *Dirichlet-Problem* für die Poisson-Gleichung. Ein Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{in } U \\ \langle \nabla u, \nu \rangle &= g && \text{in } \partial U \end{aligned}$$

ist ein *Neumann-Problem.*

(b) Im Proseminar hatte wir Theorem 5.12 im Falle $n = 2$ gezeigt.

(c) In Courant/Hilbert, “Methoden der Mathematischen Physik I” werden Greensche Funktionen für andere Gebiete konstruiert, nämlich für Rechteck, Quader und Kreisring. Dazu ist Funktionentheorie jenseits des Standardstoffs notwendig.

6 Die Wärmeleitungsgleichung

Sei $u(x, t)$ die Temperatur zur Zeit t im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Die in D zur Zeit t gespeicherte Wärmemenge ist

$$H(t) = \int_D u(x, t) d\lambda_n(x).$$

(Alle physikalischen Konstanten sind 1.) Die Wärmemenge ändert sich nur dadurch, dass Wärme durch den Rand von D fließt. Nach dem Gesetz von Fourier ist der Wärmefluss proportional zum Temperaturgradienten ∇u, also

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \int_{\partial D} \langle \nabla u(x, t), \nu \rangle \, d\sigma.$$

Um das zu verstehen, muss man beachten, dass Wärme von heißeren zu kälteren Punkten, also gegen den Gradienten fließt. Mit dem Gaußschen Integralsatz folgt nun

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \int_D \Delta u(x, t) d\lambda_n(t). \tag{6.1}$$

Andererseits nach Ableitung unter dem Integral

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \int_D u_t(x, t) d\lambda_n(x). \tag{6.2}$$

Die rechten Seiten von (6.1) und (6.2) stimmen für alle D überein; folglich sind ihre Integranden gleich.

6.1 Definition. Die partielle Differentialgleichung

$$u_t - \Delta u = 0$$

ist die *homogene Wärmeleitungsgleichung*, die Gleichung

$$u_t - \Delta u = f$$

ist die *inhomogene Wärmeleitungsgleichung*. Statt Wärmeleitungsgleichung sagt man auch *Diffusionsgleichung*.

Dabei gilt die Vereinbarung, dass ∇ und Δ immer nur auf Raumvariable wirken.

Für $n \geq 3$ ist die Fundamentallösung für die Laplace-Gleichung $(2-n)$-homogen in x, das heißt

$$\Phi(\lambda x) = \lambda^{2-n}\Phi(y) \quad \text{für alle } \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir suchen eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit ähnlicher Eigenschaft. Da man in t nicht dieselbe Homogenität wie in x erwarten darf, suchen wir eine Lösung, für die

$$u(\lambda x, \lambda^\beta t) = \lambda^\alpha u(x,t) \quad \text{für alle } \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

wobei α und β vorerst unbekannt sind. Das führt mit $\lambda = t^{-1/\beta}$ zu

$$u(x,t) = t^{-\alpha/\beta}u(t^{-1/\beta}x, 1).$$

Unser Ansatz ist also

$$u(x,t) = t^{-\alpha/\beta}v(t^{-1/\beta}|x|).$$

Dann mit $r = |x|$

$$\begin{aligned} \Delta u - u_t = t^{-\alpha/\beta}v''(t^{-1/\beta}r)t^{-2/\beta} + t^{-\alpha/\beta}\frac{n-1}{r}v'(t^{-1/\beta}r)t^{-1/\beta} + \frac{\alpha}{\beta}t^{-\alpha/\beta-1}v(t^{-1/\beta}r) \\ - t^{-\alpha/\beta}v'(t^{-1/\beta}r)\left(-\frac{1}{\beta}t^{-1/\beta-1}r\right). \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt $s = t^{-1/\beta}r$ und fassen zusammen. Dann

$$\Delta u - u_t = t^{-\alpha/\beta-2/\beta}v''(s) + t^{-\alpha/\beta-2/\beta}\frac{n-1}{s}v'(s) + \frac{\alpha}{\beta}t^{-\alpha/\beta-1}v(s) + \frac{1}{\beta}t^{-\alpha/\beta-1}sv'(s).$$

Für $\beta = 2$ sind alle t-Potenzen gleich. Wir multiplizieren mit $t^{\alpha/\beta+1}$ und erhalten

$$0 = v''(s) + \frac{n-1}{s}v'(s) + \frac{\alpha}{2}v(s) + \frac{s}{2}v'(s).$$

Jetzt muss man ahnen, dass diese Differentialgleichung äquivalent ist zu einer der Form

$$0 = A(s^\ell w')' + B(s^m w)'$$

mit $A, B, \ell, m \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$A(s^\ell v')' + B(s^m v)' = A\ell s^{\ell-1}v' + As^\ell v'' + Bms^{m-1}v + Bs^m v'.$$

Wir sehen nacheinander durch Vergleich

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ Bm &= \frac{\alpha}{2} \\ \ell &= m-1 \\ A\ell &= n-1, && \text{d. h. } n = m \\ B &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wir erhalten $\alpha = n$ und müssen die Differentialgleichung

$$(s^{n-1}w')' + \frac{1}{2}(s^n w)' = 0$$

lösen. Es gibt also eine Konstante a, so dass

$$s^{n-1}w' + \frac{1}{2}s^n w = a.$$

Wir probieren $a = 0$. Dann

$$w' = -\frac{s}{2}w.$$

Die Lösungen sind Vielfache von

$$w(s) = \exp\left(-\frac{1}{4}s^2\right).$$

Wegen $s = r/\sqrt{t}$ führt das schließlich zu

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

6.2 Definition. Die Funktion

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

heißt *Fundamentallösung* für die Wärmeleitungsgleichung.

6.3 Lemma. $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\})$.

6.4 Lemma. *Für jedes* $t > 0$ *gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\, d\lambda_n(x) = 1.$$

6.5 Definition. Eine *Anfangswertproblem* (*Cauchy-Problem*) für die Wärmeleitungsgleichung ist eine Aufgabe der Form

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= g && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

Dabei ist die letzte Zeile zu verstehen als

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(\xi,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,\, t>0}} u(x,t) = g(\xi) \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

6.6 Theorem. *Für* $g \in C(\mathbb{R}^n)$ *beschränkt setze*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)d\lambda_n(y).$$

Dann $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \times (0,\infty)$ *und* u *löst das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= g && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

Bemerkung. Man beachte, dass die Lösung des Anfangswertproblems unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit zeigt.

6.7 Lemma. *Es seien* I *ein Intervall,* $t_0 \in I$ *und* $f \in C(I^2)$*. Die Variablen seien mit* $(s,t) \in I^2$ *bezeichnet. Ferner sei* $f_t \in C(I^2)$*. Dann gilt für* $g(t) = \int_{t_0}^t f(s,t)ds$

$$g'(t) = f(t,t) + \int_{t_0}^t f_t(s,t)ds.$$

6.8 Theorem. *Sei* $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$*, so dass* $\sup\{|f(x,t)| \mid x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t \le T\} < \infty$ *für jedes* $T > 0$*. Für* $t > 0$ *sei*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)d\lambda_n(y)ds.$$

Dann $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ *und Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f && \textit{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

Beweis. Die Lösung beruht auf dem *Duhamelschen Prinzip*. Setze

$$v(x,t,s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)d\lambda_n(y).$$

Für jedes feste $s > 0$ löst $v(\cdot,\cdot,s)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ v &= g && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{s\} \end{aligned}$$

Es gilt

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,s)ds.$$

Damit ist die Anfangsbedingung schon mal klar. Aus dem vorangehenden Lemma erhalten wir

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = v(x,t,t) + \int_0^t v_t(x,t,s)ds - \int_0^t \Delta v(x,t,s)ds = f(x,t).$$

□

6.9 Korollar. *Sei* $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$*, so dass* $\sup\{|f(x,t)| \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leq T\} < \infty$ *für jedes* $T > 0$*, und sei* $g \in C(\mathbb{R}^n)$ *beschränkt. Dann löst*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)d\lambda_n(y) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)d\lambda_n(y)ds$$

das inhomogene Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta v &= f && \textit{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= g && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

6.10 Bemerkung. Eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Randbedingungen. Es sei $U = (0,1)$. Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{in } (0,1) \times (0,\infty) \\ u &= 0 && \text{in } \{0,1\} \times (0,\infty) \end{aligned}$$

Ansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ führt zu

$$v''(x)w(t) = v(x)w'(t)$$

also gibt es eine Konstante C mit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)} = C$$

Die Randbedingung führt zu $v(0) = v(1) = 0$.

Fall $C = 0$: Dann $v(x) = ax + b$. Das ist nur für $a = b = 0$ mit den Randbedingungen vereinbar.

Fall $C > 0$: Dann $v(x) = ae^{\sqrt{C}x} + be^{-\sqrt{C}x}$. Die Randbedingungen führen zu $a+b = 0$ und $ae^{\sqrt{C}} + be^{-\sqrt{C}} = 0$, also $a = b = 0$.

Fall $C < 0$. Sei $\omega = \sqrt{-C} > 0$. Dann $v(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$. Die Randbedingungen führen zu $a = 0$ und $b\sin(\omega) = 0$. Für $\omega \in \pi\mathbb{N}$ erhalten wir nicht-triviale Lösungen der Randwertaufgabe

$$u(x,t) = \sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t}.$$

6.11 Definition. Für $1 \leq p < \infty$ und $I \subset \mathbb{Z}$ setzen wir

$$\ell^p(I) = \left\{ (b_k)_{k\in I} \;\middle|\; b_k \in \mathbb{C}, \sum_{k\in I} |b_k|^p < \infty \right\}$$

Wir schreiben ℓ^p anstelle von $\ell^p(\mathbb{N})$.

6.12 Bemerkung. (a) Wenn man $\ell^p(I)$ mit der Norm

$$\|(b_k)_{k\in I}\|_p = \left(\sum_{k\in I} |b_k|^p\right)^{1/p}$$

versieht, dann ist $\ell^p(I)$ ein Banachraum. Das haben wir in Satz 10.8 der Analysis III gezeigt.

(b) Wenn man $\ell^2(I)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle (b_k)_{k\in I}, (c_k)_{k\in I}\rangle = \sum_{k\in I} b_k \overline{c}_k$$

versieht, dann ist $\ell^2(I)$ ein Hilbertraum. Das haben wir in Bemerkung 10.10 der Analysis III gezeigt.

In der Funktionalanalysis werden wir den folgenden Satz zeigen:

6.13 Satz. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und es sei $m \in \mathbb{N}$. Dann wird durch*

$$\|f\|_{C^m(\overline{U})} = \sup_{x\in U} \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\le m}} \left|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x)\right|$$

eine Norm auf $C^m(\overline{U})$ gegeben, durch die $C^m(\overline{U})$ zu einem Banachraum wird.

Für $|\alpha| \le m$ ist der Differentialoperator D^α stetig auf $C^m(\overline{U})$.

6.14 Satz. *Für $g \in C([0,1])$ gebe es eine Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, so dass $\sum_{k=1}^\infty b_k \sin(k\pi x) = g(x)$ punktweise. Dann konvergiert die Reihe*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty b_k \sin(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}$$

für jede Wahl von $0 < t_1 < t_2$ in $C^2([0,1]\times[t_1,t_2])$ und u löst das Anfangs- und Randwertproblem

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0 && \text{in } (0,1)\times(0,\infty) && \\
u &= 0 && \text{in } \{0,1\}\times(0,\infty) && \text{Randbedingung} \\
u &= g && \text{in } (0,1)\times\{0\} && \text{Anfangsbedingung}
\end{aligned}$$

Beweis. Sei h die 2-periodische Fortsetzung von

$$x \mapsto \begin{cases} g(x), & 0 \le x \le 1, \\ -g(-x), & -1 \le x < 0. \end{cases}$$

Wegen $g(0) = g(1) = 0$ ist h stetig. Dann kann ich Theorem 6.6 auf h anwenden und erhalte

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) h(y)dy$$

als Lösung von

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\
u &= h && \text{in } \mathbb{R} \times \{0\}
\end{aligned}
$$

Insbesondere gilt für jedes $\xi \in [0, 1]$

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ t \to 0}} u(x, t) = h(\xi) = g(\xi).$$

Für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ gelten

$$
\begin{aligned}
u(-x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(-x-y)^2}{4t}\right) h(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4t}\right) h(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4t}\right) h(-z) dz \\
&= -\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4t}\right) h(z) dz \\
&= -u(x, t).
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
u(x+1, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+1-y)^2}{4t}\right) h(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4t}\right) h(z+1) dz \\
&= -\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4t}\right) h(z) dz \\
&= -u(x, t).
\end{aligned}
$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $u(0, t) = 0$ und aus der zweiten $u(1, t) = -u(0, t) = 0$. Die Einschränkung von u auf $(0, 1) \times (0, \infty)$ löst daher das gemischte Anfangs- und Randwertpropblem.

Jetzt müssen wir noch zeigen, dass

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) h(y) dy = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}.$$

wobei b_k wie in der Behauptung definiert ist. Das gelingt nur indirekt, indem man nämlich die linke Seite über dem Intervall $[-1, 1]$ in ihre Fourierreihe entwickelt. Unter Verwendung der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) \sin(k\pi y) dy = \sin(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t},$$

welche man entweder ausrechnet oder aus der Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems entnimmt, sowie der Gleichung $h(-y) = -h(y)$ kann man alle Fourierkoeffizienten konkret ausrechnen und so auch diesen Teil der Behauptung zeigen. □

6.15 Theorem. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt, sei* $u \in C^2(U \times (0,\infty)) \cap C(\overline{U} \times [0,\infty))$ *eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung* $u_t - \Delta u = 0$. *Dann gilt für jedes* $T > 0$

$$\max\{u(x,t) \mid x \in \overline{U} \textit{ und } 0 \leq t \leq T\} = \max\{u(x,t) \mid x \in \partial U \textit{ oder } t = 0\}.$$

Beweis. Ich beweise das nur für $n = 1$ und $U = (0,1)$. Sei

$$M = \max\{u(x,t) \mid x \in \overline{U} \text{ und } 0 \leq t \leq T\}.$$

Für $\epsilon > 0$ setze $v(x,t) = u(x,t) + \epsilon x^2$. Dann erfüllt v die folgende Diffusionsungleichung

$$v_{xx} - v_t = u_{xx} + 2\epsilon - u_t = 2\epsilon > 0.$$

Wir wollen zeigen, dass

$$M_\epsilon = \max\{v(x,t) \mid x \in \overline{U} \text{ und } 0 \leq t \leq T\} = \max\{v(x,t) \mid x \in \partial U \text{ oder } t = 0\}.$$

Sei $(\xi,\tau) \in \overline{U} \times [0,T]$ mit $v(\xi,\tau) = \max\{v(x,t) \mid (x,t) \in \overline{U} \times [0,T]\}$. Wegen der Widerspruchsannahme gelten $\xi \in U$ und $\tau > 0$. Daher hat die Funktion $t \mapsto v(\xi,t)$ ein Maximum in τ. Wenn $\tau < T$ folgt mit den Mitteln der Kurvendiskussion, dass $v_t(\xi,\tau) = 0$, wenn $\tau = T$ folgt nur $v_t(\xi,\tau) \geq 0$. Aus der Diffusionsungleichung folgt in beiden Fällen $v_{xx}(\xi,\tau) > 0$. Nach Wahl von (ξ,τ) besitzt $x \mapsto v(x,\tau)$ in $x \in U$ ein Extremum. Also gilt $v_x(\xi,\tau) = 0$. Wegen $v_{xx}(\xi,\tau) > 0$ ist dieses Extremum ein striktes lokales Minimum im Widerspruch zur Wahl von (ξ,τ).

Beachte, dass $v \leq u + \epsilon$. Wir haben gezeigt, dass

$$\begin{aligned} M \leq M_\epsilon &= \max\{v(x,t) \mid x \in \partial U \text{ oder } t = 0\} \\ &\leq \max\{u(x,t) \mid x \in \partial U \text{ oder } t = 0\} + \epsilon. \end{aligned}$$

Mit $\epsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

6.16 Korollar (Eindeutigkeit). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt, seien* $u, v \in C^2(U \times (0,\infty)) \cap C(\overline{U} \times [0,\infty))$ *Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung. Es sei* $u(x,0) = v(x,0)$ *für alle* $x \in \overline{U}$, *und für ein* $T > 0$ *gelte* $u(x,t) = v(x,t)$ *für alle* $x \in \partial U$, $t \in [0,T]$. *Dann stimmen* u *und* v *in* $\overline{U} \times [0,T]$ *überein.*

Der Umstand, dass Randwerte für Zeiten $t > T$ die Lösung zu Zeiten $t < T$ nicht beeinflussen, entspricht der Kausalität in der physikalischen Welt.

6.17 Korollar (Stabilität). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt, seien* $h^{(1)}, h^{(2)} \in C(\partial U \times [0, \infty))$ *und* $g^{(1)}, g^{(2)} \in C(\overline{U} \times \{0\})$. *Für alle* $(x,t) \in \partial U \times [0, \infty]$ *gelte* $|h^{(1)}(x,t) - h^{(2)}(x,t)| \leq \epsilon$ *und für alle* $x \in \overline{U}$ *gelte* $|g^{(1)}(x,0) - g^{(2)}(x,0)| \leq \epsilon$. *Falls es für* $j = 1, 2$ *jeweils eine Lösung* $u^{(j)} \in C^2(U \times (0,\infty)) \cap C(\overline{U} \times [0,\infty))$ *von*

$$\begin{aligned} u_t^{(j)} + \Delta u^{(j)} &= 0 && \textit{in } U \times (0,\infty) \\ u^{(j)} &= h^{(j)} && \textit{in } \partial U \times (0,\infty) \\ u^{(j)} &= g^{(j)} && \textit{in } U \times \{0\}, \end{aligned}$$

gibt, so gilt $|u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)| \leq \epsilon$ *für alle* $(x,t) \in \overline{U} \times [0,\infty)$.

6.18 Definition. Die Differentialgleichung $u_t + \Delta u = 0$ heißt *Rückwartsdiffusionsgleichung.*

6.19 Bemerkung. (a) Sei $T > 0$. Wenn u eine Lösung des folgenden gemischten Anfangs- und Randwertproblems für die Wärmeleitungsgleichung ist

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \text{in } U \times (0,T) \\ u &= 0 && \text{in } \partial U \times (0,T) \\ u &= g && \text{in } U \times \{0\}, \end{aligned}$$

dann ist $v(x,t) = u(x, T-t)$ eine Lösung des folgenden gemischten Anfangs- und Randwertproblems für die Rückwartsdiffusionsgleichung

$$\begin{aligned} v_t + \Delta v &= 0 && \text{in } U \times (0,T) \\ v &= 0 && \text{in } \partial U \times (0,T) \\ v(x,0) &= u(x,T) && \text{in } U \times \{0\}, \end{aligned}$$

(b) Eine Lösung von

$$\begin{aligned} v_t + \Delta v &= 0 && \text{in } (0,1) \times (0,T) \\ v &= 0 && \text{in } \{0,1\} \times (0,T) \\ v(x,0) &= \sin(k\pi x) && \text{in } (0,1) \times \{0\}, \end{aligned}$$

ist $v(x,t) = \sin(k\pi x)e^{k^2\pi^2 t}$.

(c) Eine partielle Differentialgleichung zusammen mit Anfangs- und/oder Randbedingungen bezeichnet man als *korrekt gestellt*, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind

   (i) Lösbarkeit: Es gibt mindestens eine Lösung

   (ii) Eindeutigkeit: Es gibt höchstens eine Lösung

(iii) Stabilität: Die Lösung hängt stetig von den Anfangs- bzw. Randbedingungen ab

Alles drei hat natürlich nur einen Sinn, wenn man sich für Anfangs- und Randbedingungen sowie Lösungen auf Funktionenräune festlegt.

Ein Problem, welches mindestens eine der drei Bedingungen verletzt, heißt *schlecht gestellt*.

(d) Teil (b) zeigt, dass das gemischte Anfangs- und Randwertproblem für die Rückwärtsdiffusionsgleichung schlecht gestellt ist.

7 Die Wellengleichung

Wir leiten die eindimensionale Wellengleichung her. Eingespannte Saite: Die Auslenkung der Saite an der Stelle x zur Zeit t werde mit $u(x,t)$ bezeichnet. Wir betrachten die Kräfte, die auf einen kurzen Abschnitt der Saite einwirken, um die Bewegungsgleichung aufzustellen. Ob und wie die Saite am Rand eingespannt ist, ist vorerst unwichtig. Die Kraft $\vec{F}$ ist proportional zum Tangentialvektor

$$\vec{F}_1 = -T\begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x,t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_2 = T\begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x+h,t) \end{pmatrix}.$$

Auf die zweite Komponente wenden wir Newtons Kraftgesetz $\vec{F} = ma$ an

$$T(u_x(x+h,t) - u_x(x,t)) = m\, u_{tt}(x,t).$$

Die Masse ist gleich der Dichte ρ multipliziert mit der Länge des Abschnitts; im Fall kleiner Auslenkung ist diese ungefähr gleich h. Wir erhalten mach Division durch h

$$T\frac{u_x(x+h,t) - u_x(t)}{h} = \rho u_{tt}.$$

Übergang $h \to 0$ und Division durch ρ gibt ergibt die eindimensionale Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. Die Konstante c heißt *Ausbreitungsgeschwindigkeit.* Der Einfachhheit halber setzen wir sie zu 1.

7.1 Definition. Die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

heißt *Wellengleichung.*

Bemerkung. (a) In einigen Büchern findet man das Zeichen $\Box u = u_t - \Delta u$.

(b) Die Wellengleichung ist von der Ordnung 2 in der Zeit. Man setzt Anfangsbedingungen für u und u_t.

Im Fall $n = 1$ lösen wir nun das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u &= g && \text{in } \mathbb{R} \times \{0\} \\ u_t &= h && \text{in } \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned}$$

mit der Methode von d'Alembert. Dazu beachtet man

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)u = u_{tt}-u_{xx}.$$

Setzt man also $v = \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)u$, so gilt

$$v_t + v_x = 0.$$

Das ist eine Transportgleichung. Nach Satz 2.2 gibt es also eine Funktion a, so dass $v(x,t) = a(x-t)$ für alle x, t. Daraus ergibt sich

$$u_t(x,t) - u_x(x,t) = a(x-t).$$

Dies ist eine inhomogene Transportgleichung. Mit Bemerkung 2.3 ergibt sich für eine weitere Funktion b

$$u(x,t) = b(x+t) + \int_0^t a(x-(s-t)-s)ds = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + b(x+t).$$

Das müssen wir an die Anfangsbedingungen anpassen. Sofort klar ist $b = g$. Für a erhalten wir

$$a(x) = v(x,0) = u_t(x,0) - u_x(x,0) = h(x) - g'(x).$$

Das setzen wir wieder ein und erhalten

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}(h(y)-g'(y))dy + g(x+t) \\ &= \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy. \end{aligned} \tag{7.1}$$

7.2 Theorem. *Für $g \in C^2(\mathbb{R})$ und $h \in C^1(\mathbb{R})$ löst die Funktion u aus (7.1) die Anfangswertaufgabe*

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u &= g && \textit{in } \mathbb{R}\times\{0\} \\ u_t &= h && \textit{in } \mathbb{R}\times\{0\} \end{aligned}$$

7.3 Beispiel. (a) Die Lösung für $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ und $h = 0$ besteht aus zwei auseinander laufenden Spitzen.

Die Lösung für $g = 0$ und $h = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ besteht aus einem Plateau, welches immer größer wird. Es gilt nämlich

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x-t}^{x+t} e^{-y^2}dy = \frac{1}{4}(\mathrm{erf}(x+t) - \mathrm{erf}(x-t))$$

wobei $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}dy$.

(b) Seien nun $g \in C^2([0,\infty))$ mit $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ und $h \in C^1([0,\infty))$ mit $h(0) = h'(0) = 0$. Wir lösen das kombinierte Anfangs- und Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in } (0,\infty) \times (0,\infty) \\ u &= 0 && \text{in } \{0\} \times (0,\infty) \\ u &= g && \text{in } (0,\infty) \times \{0\} \\ u_t &= h && \text{in } (0,\infty) \times \{0\} \end{aligned}$$

Für $x \leq 0$ definieren wir der Einfachhheit halber $g(x) = 0$ und $h(x) = 0$. Dann $g \in C^2(\mathbb{R})$ und $h \in C^1(\mathbb{R})$. Eine geometrische Überlegung führt zu dem Ansatz

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy + k(x-t)\right).$$

Es muss gelten

$$0 = u(0,t) = \frac{1}{2}\left(g(t) + g(-t) + \int_0^t h(y)dy + k(-t)\right).$$

Das gilt genau für $k(-t) = -g(t) - \int_0^t h(y)dy$, $t \geq 0$. Dann stimmen alle anderen Bedingungen automatisch. Wir erhalten

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x) + \int_{t-x}^{t+x} h(y)dy\right), & x \leq t, \\ \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} h(y)dy\right), & x > t. \end{cases}$$

Aus der Herleitung sieht man, dass $u \in C^2((0,\infty)^2)$.

Nun wollen wir eine Lösung für das kombinierte Anfangs- und Randwertproblem in $n = 3$ und $n = 2$ konstruieren. Der erste Schritt ist in allen Dimensionen möglich. Gesucht ist für $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= g && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \\ u_t &= h && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned} \tag{7.2}$$

7.4 Bezeichnung. Für $u \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $r, t > 0$ setze

$$U(x,r,t) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y,t)d\sigma(y).$$

U heißt *sphärisches Mittel* von u.

7.5 Lemma. *Wenn u von der Klasse C^1 bzw. C^2 ist, dann auch U als Funktion von r und t.*

7.6 Satz. *Wenn* u *das kombinierte Anfangs- und Randwertproblem (7.2) löst, dann ist das sphärische Mittel* U *Lösung der folgenden* Poisson-Darboux-Gleichung

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r &= 0 && \textit{in } (0,\infty) \times (0,\infty) \\ U &= G && \textit{in } (0,\infty) \times \{0\} \\ U_t &= H && \textit{in } (0,\infty) \times \{0\} \end{aligned}$$

wobei G *und* H *jeweils die sphärischen Mittel von* g *und* h *sind.*

7.7 Lemma. *Wenn* V *dass sphärische Mittel von* $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *ist, dann erfüllt* V *die* Darbouxsche Gleichung

$$V_{rr} + \frac{n-1}{r} V_r = \Delta V.$$

Um die Poisson-Darboux-Gleichung für $n = 3$ zu lösen, setzen wir $\widetilde{U} = rU$, $\widetilde{G} = rG$ und $\widetilde{H} = rH$. Dann $\widetilde{U}_r = U + rU_r$ und $\widetilde{U}_{rr} = 2U_r + rU_{rr}$ mit entsprechenden Formel für G und H soweit sinnvoll. Wir erhalten

$$\widetilde{U}_{rr} = r\left(\frac{3-1}{r} U_r + U_{rr}\right) = rU_{tt} = \widetilde{U}_{tt}.$$

Somit ist $\widetilde{U}$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_{tt} - \widetilde{U}_{rr} &= 0 && \text{in } (0,\infty) \times (0,\infty)) \\ \widetilde{U} &= 0 && \text{in } \{0\} \times (0,\infty) \\ \widetilde{U} &= \widetilde{G} && \text{in } (0,\infty) \times \{0\} \\ \widetilde{U}_t &= \widetilde{H} && \text{in } (0,\infty) \times \{0\} \end{aligned}$$

Diese Aufgabe lösen wir bequem mit der Methode von d'Alembert und erhalten für $0 < r < t$

$$\widetilde{U}(x,r,t) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{G}(x,r+t) - \widetilde{G}(x,t-r) + \int_{t-r}^{t+r} \widetilde{H}(x,\rho)\right) d\rho.$$

Mit der Stetigkeit von U aus dem Beweis des Lemmas folgt

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x,r,t) = \lim_{r\to 0} \frac{\widetilde{U}(x,r,t)}{r} = \widetilde{G}_t(x,t) + \widetilde{H}(x,t). \tag{7.3}$$

Unter Verwendung der Definition des sphärischen Mittels erhält man

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_t(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{\partial B_1(0)} g(x+ty)d\sigma(y)\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_1(0)} g(x+ty)d\sigma(y) + \frac{t}{4\pi}\int_{\partial B_1(0)} \langle \nabla g(x+ty), y\rangle\, d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} g(y)d\sigma(y) + \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} \langle \nabla g(y), y-x\rangle\, d\sigma(y). \end{aligned}$$

Wegen

$$\widetilde{H}(x,t) = \frac{t}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} h(y)\,d\sigma(y)$$

haben wir die Kirchhoffsche Formel hergeleitet.

7.8 Theorem (Kirchhoffsche Formel). *Sei $n = 3$ und seien $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Dann besitzt das kombinierte Anfangs- und Randwertproblem (7.2) genau eine Lösung. Diese ist gegeben durch*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)} \left(th(y) + g(y) + \langle \nabla g(y), y-x\rangle\right) d\sigma(y).$$

Nun lösen wir das Ausgangsproblem (7.2) für $n = 2$. Wir setzen dazu

$$\overline{u}(x_1,x_2,x_3,t) = u(x_1,x_2,t)$$

und entprechend für g und h. Wenn u eine Lösung der Wellengleichung in $n = 2$ ist, dann ist $\overline{u}$ eine in $n = 3$. Wegen (7.3) bedeutet das

$$\overline{u}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B_t(\overline{x})} \overline{g}\,d\sigma\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B_t(\overline{x})} \overline{h}\,d\sigma.$$

Wir parametrisieren die beiden Halbsphären von $\partial B_t(\overline{x})$ über $B_t(x)$ wie in Beispiel 4.4 und erhalten

$$\int_{\partial B_t(\overline{x})} \overline{g}\,d\sigma = 2\int_{B_t(x)} g(y)\sqrt{1+|\nabla\gamma(y)|^2}\,d\lambda_2(y),$$

wobei $\gamma(y) = \sqrt{t^2 - |y-x|^2}$. Wegen

$$\nabla\gamma(y) = \frac{y-x}{\gamma(y)}$$

gilt

$$\sqrt{1+|\nabla\gamma(y)|^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}.$$

Differenziert man

$$\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B_t(\overline{x})} \overline{g}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{B_1(0)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|y-x|^2}}d\lambda_2(y) = \frac{t}{2\pi}\int_{B_1(0)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}}d\lambda_2(z)$$

nach t, so bekommt man

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{B_1(0)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}}d\lambda_2(z) + \frac{t}{2\pi}\int_{B_1(0)} &\frac{\langle \nabla g(x+tz), z\rangle}{\sqrt{1-|z|^2}}d\lambda_2(z)\\ &= \frac{1}{2\pi t}\int_{B_t(x)} \frac{g(y)+\langle \nabla g(y), y-x\rangle}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}d\lambda_2(y).\end{aligned}$$

7.9 Theorem (Poissonsche Formel für das Anfangswertproblem der ebenen Wellengleichung). *Sei $n = 2$ und seien $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$ und $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Dann besitzt das kombinierte Anfangs- und Randwertproblem (7.2) genau eine Lösung. Diese ist gegeben durch*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi t}\int_{B_t(x)} \frac{g(y) + th(y) + \langle \nabla g(y), y - x\rangle}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} d\lambda_2(y).$$

Bemerkung. (a) Sowohl die Kirchhoffsche als auch die Poissonsche Formel zeigen, dass Wellen sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten.

(b) In Evans wird für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Anfangswertproblem auf dem $\mathbb{R}^n$ gelöst. Man beobachtet das *Huygenssche Prinzip*

In ungeraden Dimensionen $n \geq 3$ wirkt die Anfangsbedingung an der Stelle x nur auf die Punkte des Vorwärts-Lichtkegels

$$\{(y,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \mid |y-x|^2 = t^2\}.$$

In geraden Dimensionen werden alle Punkte in

$$\{(y,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \mid |y-x|^2 \leq t^2\}.$$

beeinflusst.

7.10 Beispiel. Sei $h \equiv 0$ und sei $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ radialsymmetrisch, also $g(x) = G(|x|)$ für ein $G \in C^3[0,\infty)$. Wir lösen das Anfangswertproblem (7.2) mit der Kirchhoffschen Formel für den Punkt $x = 0$

$$u(0,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(0)} (g(y) + \langle \nabla g(y), y\rangle)\, d\sigma(y).$$

In Bemerkung 3.2 hatten wir gezeigt

$$\nabla g(y) = \frac{G'(|y|)}{|y|} y.$$

Also

$$u(0,t) = G(t) + \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(0)} G'(|y|)|y| d\sigma(y) = G(t) + tG'(t).$$

Das Phänomen, dass räumlich verstreute Irregularitäten sich zu einer stärkeren Irregularität fokussieren, bezeichnet man als *Kaustik*.

7.11 Satz (Duhamelsches Prinzip für die Wellengleichung). *Sei $f \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. Für $s > 0$ sei v^s eine Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$\begin{aligned} v^s_{tt} - \Delta v^s &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ v^s &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{s\} \\ v^s_t(\cdot, s) &= f(\cdot, s) && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{s\} \end{aligned}$$

Dann ist

$$u(x,t) = \int_0^t v^s(x,t)ds$$

eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \textit{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \\ u_t &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Forderung, dass v^s die Wellengleichung löst, schließt $v^s \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ein. Welche Regularitätsanforderungen an f zu stellen sind, um diese Regularität von v^s sicherzustellen, hängt von der Dimension ab.

7.12 Satz. *Sei* $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. *Dann ist*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_t(x)} \frac{f(y, t - |y-x|)}{|y-x|} d\lambda_3(y)$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \textit{in } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^3 \times \{0\} \\ u_t &= 0 && \textit{in } \mathbb{R}^3 \times \{0\} \end{aligned}$$

Bemerkung. Den Integranden bzeichnet man als *retardiertes Potenzial.*

8 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

8.1 Bezeichnung. Sei

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f$$

eine lineare Differentialgleichung. Ihr *Symbol* ist die Funktion

$$p_2(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha. \tag{8.1}$$

Für festes x ist p_2 eine quadratische Form in ξ

$$p_2(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{j,k}(x)\xi_j\xi_k = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_{1,1}(x) & b_{1,2}(x) & \dots & b_{1,n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n,1}(x) & b_{n,2}(x) & \dots & b_{n,n}(x)\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}.$$

Die quadratische Matrix aus der Gleichung bezeichnen wir mit $B(x)$. Dabei darf ohne Einschränkung $b_{j,k}(x) = b_{k,j}(x)$ angenommen werden. Dann ist $B(x)$ für jedes x symmetrisch und daher reell diagonalisierbar.

8.2 Beispiel. (a) Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ in n-Raumvariablen: Dann ist $B(x)$ für jedes x die negative $n \times n$-Einheitsmatrix.

(b) Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = f$. Die Zeitvariable werde mit x_{n+1} bezeichnet. Dann ist für jedes x die $(n+1)\times(n+1)$-Matrix $B(x)$ gegeben durch

$$B(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(c) Wellengleichung $u_t - \Delta u = f$. Es sei wieder x_{n+1} die Zeitvariable. Dann ist für jedes x die $(n+1)\times(n+1)$-Matrix $B(x)$ gegeben durch

$$B(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

8.3 Definition. Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden nach den Vorzeichen der Eigenwerte von B geordnet. Die Gleichung (8.1) heißt

- *elliptisch* an der Stelle x, wenn alle Eigenwerte von $B(x)$ dasselbe Vorzeichen haben und $B(x)$ nicht singulär ist,
- *parabolisch* an der Stelle x, wenn $B(x)$ singulär ist und alle von Null verschiedenen Eigenwerte von $B(x)$ dasselbe Vorzeichen haben,
- *hyperbolisch* an der Stelle x, wenn $B(x)$ nicht singulär ist und genau ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die anderen hat.

Eine Differentialgleichungen heißt elliptisch, wenn sie an jeder Stelle elliptisch ist, analog für die anderen Begriffe.

Bemerkung. (a) Nur in $n = 2$ ist das zumindest für jeden Punkt eine Klassifikation.

(b) Literatur für den elliptischen Fall: Gilbarg, D., und Trudinger, N. S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order

8.4 Beispiel. Die Poisson-Gleichung ist elliptisch, die Wärmeleitungsgleichung parabolisch und die Wellengleichung ist hyperbolisch.

Bemerkung. Man vergleiche mit der Klassifikation der Kegelschnitte

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d = 0.$$

8.5 Bemerkung. Je nach Typ der Differentialgleichungen werden unterschiedliche Probleme untersucht:

- hyperbolisch: Anfangswertaufgabe (Cauchy-Problem)
- elliptisch: Randwertprobleme oder Eigenwertprobleme

  Bei einem Eigenwertproblem werden homogene Randbedingungen gestellt und dazu die Eigenwerte bestimmt
- parabolisch: Gemischte Anfangs- und Randwertprobleme

8.6 Definition. (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $f\colon \partial U \to \mathbb{R}$. Man sagt, dass u die *Dirichlet-Randbedingung* $u = f$ in ∂U erfüllt, wenn es eine höchstens abzählbare Teilmenge $B \subset \partial U$ gibt, so dass für alle $x \in \partial U \setminus B$ gilt

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in U}} u(y) = f(x).$$

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit stückweisem C^1-Rand, es existiert also eine höchstens abzählbare Teilmenge $A \subset \partial U$, so dass für alle $x \in \partial U \setminus A$ die äußere Einheitsnormale $\nu(x)$ an U in x erklärt ist. Man sagt, dass u die *Neumann-Randbedingung* $\frac{\partial u}{\partial \nu} = f$ erfüllt, wenn es eine abzählbare Teilmenge $B \subset \partial U$ mit $A \subset B$ gibt, so dass für alle $x \in \partial U \setminus B$ gilt

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in U}} \langle \nabla u(y), \nu(x) \rangle = f(x).$$

8.7 Beispiel. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$. Gegeben sei das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } U \\ u &= f && \text{in } \partial U \end{aligned}$$

wobei $f(x, 0) = 0$ und $f(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = 1$ für $0 < \varphi < \pi$.

Die Lösung ist

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \left(\arctan \frac{y}{x+1} + \arctan \frac{y}{1-x} \right).$$

8.8 Beispiel. Für $a, b > 0$ sei $U = (-a, a) \times (-b, b) \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Rechteck. Wir bestimmen Eigenwerte von $-\Delta$ unter Dirichlet Randbedingungen durch Separationsansatz. Wir werden in der Tat alle Eigenwerte bestimmen, können das aber nicht beweisen.

Wir suchen also Funktionen $u(x_1, x_2) = v(x_1)w(x_2)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $-\Delta u = \lambda u$ und $u = 0$ in ∂U. Also

$$\frac{v''}{v} + \frac{w''}{w} = -\lambda.$$

Beide Brüche sind konstant. Setzt man also $c = \frac{v''}{v}$ und $d = \frac{w''}{w}$, so gilt $c+d = -\lambda$. Für $c \geq 0$ oder $d \geq 0$ sind die Randbedingungen nur trivial zu erfüllen. Also $0 > c = -\omega^2$ und $0 > d = -\sigma^2$ und $v(x_1) = \alpha_1 \cos(\omega x_1) + \beta_1 \sin(\omega x_1)$ und $w(x_2) = \alpha_2 \cos(\sigma x_2) + \beta_2 \sin(\sigma x_2)$. Dabei erfüllen α_1 und β_1 das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega a) & \sin(\omega a) \\ \cos(\omega a) & -\sin(\omega a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Es gibt genau dann eine nicht-triviale Lösung, wenn $0 \neq -2\sin(\omega a)\cos(\omega a) = -\sin(2\omega a)$. Eigenvektoren kann es daher nur für $\omega = \frac{\pi}{2a} k_1$ mit $k_1 \in \mathbb{N}$ geben.

Ebenfalls notwendig ist $\sigma = \frac{\pi}{2b}k_2$ für $k_2 \in \mathbb{N}$. Setzt man

$$v_{k_1}(x_1) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2a}k_1x_1\right), & k_1 \text{ ungerade}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2a}k_1x_1\right), & k_1 \text{ gerade}, \end{cases}$$

$$w_{k_2}(x_2) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2b}k_2x_2\right), & k_2 \text{ ungerade}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2b}k_2x_2\right), & k_2 \text{ gerade}, \end{cases}$$

so ist für jedes Paar $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$ die Funktion $u(x_1, x_2) = v_{k_1}(x_1)w_{k_2}(x_2)$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert

$$\lambda = \omega^2 + \sigma^2 = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{k_1^2}{a^2} + \frac{k_2^2}{b^2}\right).$$

Warum sind das alle Eigenwerte? In der Linearen Algebra wird gezeigt, dass die Eigenwerte eines selbstadjungierten linearen Operators auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt seinen Definitionsbereich aufspannen. In der Funktionalanalysis wird gezeigt, dass der entsprechende Satz auch für unendlich-dimensionale Hilberträume gilt. Ferner wird gezeigt, dass der Laplace-Operator selbstadjungiert ist. Schließlich zeigt man mit den Mitteln der Fourieranalyse, dass die hier gefundenen Eigenfunktionen den der Aufgabe angemessenen Hilbertraum aufspannen.

Wie viele Eigenwerte liegen unterhalb von R? Für $R > 0$ sei $N(R)$ gleich der Anzahl der Eigenwerte λ mit $\lambda \leq R$. Es bedeutet

$$\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{k_1^2}{a^2} + \frac{k_2^2}{b^2}\right) \leq R,$$

dass (k_1, k_2) in der Ellipse $E = \left\{(x, y) \in R^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq \frac{4R}{\pi^2}\right\}$ liegt. Es gilt $\lambda_2(E) = ab\lambda_2(B_{2\sqrt{R}/\pi}(0)) = \frac{4abR}{\pi}$. Wegen $k_1, k_2 > 0$ berücksichtigen wir davon nur ein Viertel. Da mit (k_1, k_2) auch immer das Quadrat $(k_1 - 1, k_1) \times (k_2 - 1, k_2)$ in E liegt, gilt

$$N(R) \leq \frac{abR}{\pi}.$$

Andererseits kann man zeigen, dass die Anzahl der Quadrate, die ∂E berühren, proportional zu $\sqrt{R}$ ist. Daraus folgt das *Weylsche Gesetz* für das Rechteck

$$\lim_{R\to\infty} \frac{N(R)}{R} = \frac{\lambda_2(U)}{4\pi}.$$

9 Distributionskalkül

Bei der Untersuchung linearer Differentialgleichungen ist es häufig nützlich, den Funktionsbegriff zu verallgemeinern.

9.1 Definition. Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen setzen wir

$$C_c^\infty(U) = \{\varphi \in C^\infty(U) \mid \operatorname{Supp}\varphi \subset U \text{ und } \operatorname{Supp}\varphi \text{ kompakt}\}.$$

Die Elemente von $C_c^\infty(U)$ heißen *Testfunktionen*. Häufig schreibt man $\mathcal{D}(U)$ für $C_c^\infty(U)$ und $\mathcal{E}(U)$ für $C^\infty(U)$.

In §16 der Analysis III hatten wir gesehen, dass es ausreichend viele Testfunktionen gibt.

9.2 Satz (Analysis III, Satz 16.3). *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und seien $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $X \subset A_1 \cup \dots \cup A_m$. Dann existiert eine der Überdeckung $A_1, \dots, A_m$ untergeordnete Zerlegung $(g_1, \dots, g_m)$ der Eins.*

Das bedeutet $g_j \in \mathcal{D}(A_j)$, $g_j \geq 0$ und $\sum_{j=1}^m g_j(x) = 1$ für alle $x \in X$.

9.3 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}(U)$. Sie heißt *konvergent* gegen $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subset U$ gibt, so Supp $\varphi_j \subset K$ für alle j und für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Folge $\left(\frac{\partial^\alpha \varphi_j}{\partial x^\alpha}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}$ konvergiert.

Wie immer sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

9.4 Definition. Ein lineares Funktional $T\colon \mathcal{D}(U) \to \mathbb{K}$ heißt *Distribution*, wenn es folgenstetig ist, wenn also gilt

> Für jede konvergente Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(U)$ mit Grenzwert φ gilt $\lim_{j\to\infty} T(\varphi_j) = T(\varphi)$.

Der Raum aller Distributionen wird mit $\mathcal{D}'(U)$ bezeichnet. Statt $T(\varphi)$ schreibt man $\langle T, \varphi\rangle$.

9.5 Beispiel. (a) Sei μ ein lokal endliches Borelmaß, das heißt ein Borelmaß, so dass $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten K. Dann wirkt μ als Distribution

$$\langle \mu, \varphi\rangle = \int_U \varphi \, d\mu.$$

(b) Ein Spezialfall hiervon ist das *Dirac-Maß* δ_x mit $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x)$. Bei den Physikern heißt $\delta_0 = \delta$ auch Diracsche Deltafunktion, obwohl δ keine Funktion ist.

(c) Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $x \in U$ ist
$$\langle T, \varphi \rangle = \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(x)$$
eine Distribution.

9.6 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine messbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{K}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn für jedes kompakte Teilmenge K von U gilt $\int_K |f| d\lambda_n < \infty$.

Lokal integrierbare Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, werden identifiziert. Der Raum aller lokal integrierbaren Funktionen auf U wird mit $L^1_{loc}(U)$ bezeichnet.

9.7 Bemerkung. $C(U) \subset L^1_{loc}(U)$.

9.8 Satz. $L^1_{loc}(U)$ *wird durch die folgende Vorschrift nach* $\mathcal{D}'(U)$ *eingebettet*
$$\langle f, \varphi \rangle = \int_U f\varphi, \qquad f \in L^1_{loc}(U),\ \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

9.9 Bemerkung. Für $f \geq 0$ ist Satz 9.8 ein Spezialfall von Beispiel 9.5 (a), angewandt auf das Maß
$$\mu(B) = \int_B f\, d\mu.$$

9.10 Satz. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Ein lineares Funktional* $T\colon \mathcal{D}(U) \to \mathbb{K}$ *ist genau dann eine Distribution, wenn für jede kompakte Teilmenge* $K \subset U$ *ein* $k \in \mathbb{N}_0$ *und ein* $C > 0$ *existieren, so dass* $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|_k$ *für alle* $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ *mit* $\operatorname{Supp}\varphi \subset K$, *wobei* $\|\varphi\|_k = \max\{|\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}| \mid |\alpha| \leq k,\ x \in U\}$.

9.11 Bemerkung. Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$. Dann $f, f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ und es gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\langle f, \varphi' \rangle.$$

9.12 Satz. *Seien* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $T \in \mathcal{D}'(U)$ *und* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. *Dann wird durch*
$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \varphi^{(\alpha)} \rangle$$
eine Distribution erklärt. Wir bezeichnen sie als partielle Ableitung *von* T *zum Multiindex* α.

9.13 Bemerkung. Also besitzt jede Distribution, beispielsweise jede stetige Funktion, Ableitungen beliebiger Ordnung im Distributionssinn. Man zeigt durch vollständige Induktion mit den Argumenten aus der Bemerkung, dass für C^k-Funktionen f die Ableitungen $f^{(\alpha)}$ mit $|\alpha| \leq k$ im klassischen und im Distributionssinn übereinstimmen.

9.14 Beispiel. Wir leiten die Heaviside-Funktion H ab.

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0. \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Für jede Testfunktion φ gilt

$$-\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0).$$

Also $H' = \delta_0$ im Distributionssinn.

9.15 Satz. *Für $g, h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ wird durch*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h \, d\lambda_1$$

eine Distributionslösung der eindimensionalen Wellengleichung gegeben.

9.16 Satz. *Es sei Φ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^n$, also*

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Dann $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\Phi = \delta_0$ im Distributionssinn.

9.17 Bemerkung. Wenn $L(x, D)$ ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten ist, dann bezeichnet man jede Distribution Φ mit $L(x, D)\Phi = \delta_0$ als *Fundamentallösung.*

Für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle gf, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (gf)\varphi \, d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} f(g\varphi) \, d\lambda_1 = \langle f, g\varphi \rangle .$$

Daher definieren wir:

9.18 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T \in \mathcal{D}'(U)$ und sei $g \in C^\infty(U)$. Dann definieren wir die Distribution gT durch

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle .$$

9.19 Definition. Eine Folge $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}'(U)$ konvergiert genau dann gegen $T \in \mathcal{D}'(U)$, wenn für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gilt

$$\lim_{j \to \infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle .$$

Bemerkung. Damit ist die Topologie auf $\mathcal{D}'(U)$ nicht komplett beschrieben (siehe Meise und Vogt, Beispiel 24.37).

9.20 Satz. *Für $j \in \mathbb{N}$ sei $T_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ die durch die L^1_{loc}-Funktion*

$$f_j \colon x \mapsto \left(\frac{j}{4\pi}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{jx^2}{4}\right)$$

gegebene Distribution. Dann $\lim_{j\to\infty} T_j = \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

9.21 Beispiel. Für $n = 1$, f_j wie oben und H die Heaviside-Funktion gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle f_j H, \varphi\rangle = \langle H, f_j\varphi\rangle = \int_0^\infty f_j \varphi \, d\lambda_1$$

Wir setzen φH wie folgt zu einer geraden Funktion $\psi \in C(\mathbb{R})$ fort

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Dann folgt aus Theorem 6.6

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \langle f_j H, \varphi\rangle = \lim_{j\to\infty} \int_0^\infty \Phi\left(x, \frac{1}{j}\right) \psi(x) dx = \frac{1}{2} \lim_{j\to\infty} \int_{-\infty}^\infty \Phi\left(x, \frac{1}{j}\right) \psi(x) dx \\ = \frac{1}{2}\psi(0) = \frac{1}{2}\varphi(0), \end{aligned}$$

also $\lim_{j\to\infty} f_j H = \frac{1}{2}\delta_0$.

Wir werden in den Übungen aber folgendes zeigen

(a) Für $a_j(x) = H(x - j^{-1/4})$ gilt $\lim_{j\to\infty} a_j = H$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(b) $\lim_{j\to\infty} \langle f_j a_j, \varphi\rangle = 0$ für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Das bedeutet, dass man das Produkt der Distributionen δ_0 und H nicht sinnvoll erklären kann, denn sowohl $(f_j H)_{j\in\mathbb{N}}$ als auch $(f_j a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ müssten gegen dieses Produkt konvergieren.

Da es keine Produkte von Distributionen gibt, spielt der Distributionskalkül bei der Untersuchung nichtlinearer Differentialgleichungen keine Rolle.

9.22 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $g \in L^1_{loc}(U)$ mit $\langle g, \varphi\rangle = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Dann $g = 0$.*

10 Soboleweräume

Wiederholung. Für $1 \leq p < \infty$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ messbar hatten wir definiert

$$L^p(U) = \{f \colon X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \|f\|_p < \infty\},$$

wobei

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\lambda_n\right)^{1/p}.$$

Wir hatten gezeigt, dass diese Räume Banachräume sind, also jede Cauchy-Folge konvergiert. Für $1 < p < \infty$ hatten wir die Höldersche Ungleichung gezeigt. Dabei ist q so zu wählen, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für $f \in L^p(U)$ und $g \in L^q(U)$

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

10.1 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt $L^p(U) \subset L^1_{loc}(U)$.*

10.2 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und seien $u, v \in L^1_{loc}(U)$. Man sagt, v sei die *schwache Ableitung* von u zum Multiindex α, wenn für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gilt

$$\int_U u\,\varphi^{(\alpha)}\, d\lambda_n = (-1)^{|\alpha|} \int v\,\varphi\, d\lambda_n.$$

Man schreibt dann $v = D^\alpha u$.

Bemerkung. $v \in L^1_{loc}(U)$ ist also genau dann die schwache Ableitung von $u \in L^1_{loc}(U)$, wenn die durch v gegebene Distribution gleich der α-Ableitung der durch u gegebenen Distribution ist.

10.3 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $k \in \mathbb{N}_0$ und sei $1 \leq p < \infty$. Der *Sobolewraum* $W^{k,p}(U)$ besteht aus allen $u \in L^p(U)$, deren sämtliche Ableitungen $D^\alpha u$ mit $|\alpha| \leq k$ im schwachen Sinne existieren und in $L^p(U)$ liegen.

Der Raum $W^{k,2}(U)$ wird auch mit $H^k(U)$ bezeichnet.

10.4 Beispiel. Die Funktion $f(x) = |x|$ liegt für jedes p in $W^{1,p}(-1,1)$, aber nicht in $W^{2,p}(-1,1)$.

10.5 Definition. Für $1 \leq p < \infty$ wird $W^{k,p}(U)$ versehen mit der Norm

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p}.$$

Das bedeutet, dass $\|u\|_{k,p}$ die ℓ^p-Norm des Tupels $(\|D^\alpha u\|_p)_{|\alpha|\le k}$ ist.

$H^k(U)$ wird versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{H^k(U)} = \sum_{|\alpha|\le k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle\,,$$

wobei auf der rechten Seite das Skalarprodukt des $L^2(U)$ genommen wird.

10.6 Lemma. *Eine Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $W^{k,p}(U)$ konvergiert genau dann gegen $u \in W^{k,p}(U)$, wenn für jedes α mit $|\alpha| \le k$ die Folge $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $L^p(U)$ gegen $D^\alpha u$ konvergiert. Sie ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn für jedes α mit $|\alpha| \le k$ die Folge $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.*

10.7 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und jedes $p \in [1,\infty)$ ist $W^{k,p}(U)$ ein Banachraum und $H^k(U)$ ein Hilbertraum.*

10.8 Beispiel. Für welche $\beta > 0$ ist $u(x) = |x|^{-\beta}$ in $W^{1,p}(B_1(0))$?

Für $x \neq 0$ existieren alle Ableitungen im klassischen Sinne, nämlich

$$u_{x_i}(x) = -\frac{\beta x_i}{|x|^{\beta+2}}.$$

Notwendig für $u \in W^{1,p}$ ist daher

$$\int_{B_1(0)} \left(\frac{|x_i|}{|x|^{\beta+2}}\right)^p d\lambda_n < \infty$$

für $i = 1, \dots, n$. Beachte

$$|x|^p = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{p/2} \le \left(n \max_{1\le i\le n} x_i^2\right)^{p/2} = n^{p/2} \max_{1\le i\le n} |x_i|^p \le n^{p/2} \sum_{i=1}^n |x_i|^p.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}\infty > \int_{B_1(0)} \frac{|x|^p}{|x|^{(\beta+2)p}} d\lambda_n = \int_{B_1(0)} |x|^{-(\beta+1)p} d\lambda_n &= \int_0^1 \int_{\partial B_r(0)} r^{-(\beta+1)p} d\sigma\, dr \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_0^1 r^{n-1-(\beta+1)p} dr.\end{aligned}$$

Dieses Integral ist genau dann endlich, wenn $n > (\beta+1)p$.

Wir zeigen nun, dass unter dieser Voraussetzung die schwache Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ in der Tat durch $-\beta x_i |x|^{-\beta-2}$ gegeben wird. Dass diese Funktion in $L^p(B_1(0))$ liegt, haben wir soeben gezeigt. Wir wenden dazu für ein beliebiges $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ den Divergenzsatz auf das Vektorfeld $F = u\varphi e_i$ an. Außerhalb des Ursprungs gilt

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\beta x_i}{|x|^{\beta+2}}\varphi + |x|^{-\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Daher besagt der Divergenzsatz für $\epsilon > 0$

$$\int_{B_1(0)\setminus B_\epsilon(0)} u_{x_i}\varphi d\lambda_n = -\int_{B_1(0)\setminus B_\epsilon(0)} u\varphi_{x_i} d\lambda_n - \int_{\partial B_\epsilon(0)} u\varphi\, d\sigma.$$

Wir betrachten die Grenzwerte für $\epsilon \to 0$ einzeln.

$$\begin{aligned}\int_{B_\epsilon(0)} |u_{x_i}\varphi| d\lambda_n \leq C_1 \int_0^\epsilon \int_{\partial B_\epsilon(0)} r^{-\beta-1} d\sigma\, dr &= \frac{C_1}{n\alpha(n)} \int_0^\epsilon r^{n-\beta-2} dr \\ &= \frac{C_1}{n\alpha(n)(n-\beta-1)} \epsilon^{n-\beta-1} \to 0,\end{aligned}$$

denn aus $n > (\beta+1)p$ folgt $n > \beta + 1$. Speziell

$$\int_{B_\epsilon(0)} |u\varphi_{x_i}| d\lambda_n \leq C_2 \int_{B_\epsilon(0)} |x|^{-\beta} d\lambda_n \to 0.$$

Schließlich

$$\int_{\partial B_\epsilon(0)} |u\varphi| d\sigma \leq C_2 \int_{\partial B_\epsilon(0)} \epsilon^{-\beta} d\sigma = \frac{C_2}{n\alpha(n)} \epsilon^{n-1-\beta} \to 0.$$

Wir haben gezeigt, dass u genau dann in $W^{1,p}$ liegt, wenn $n > (\beta+1)p$.

10.9 Definition. Mit $W_0^{k,p}(U)$ wird der Abschluss von $\mathcal{D}(U)$ in $w^{k,p}$ bezeichnet. Statt $W_0^{k,2}(U)$ schreibt man auch $H_0^k(U)$.

Den Beweis des folgenden Satzes findet man in Abschnitt 5.5 des Buchs von Evans.

10.10 Theorem. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand. Dann existiert eine stetige, lineare Abbildung*

$$T\colon W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$$

mit der Eigenschaft

$$Tu = u|_{\partial U} \quad \textit{für alle } u \in W^{1,p}(U) \cap C(\overline{U}).$$

Dabei wird ∂U mit dem Oberflächenmaß σ versehen.

Der Kern von T ist $W_0^{1,p}(U)$.

11 Energiemethoden

11.1 Bezeichnung. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $f \in H^1(U)$. Die Abbildung

$$I\colon H^1(U) \to \mathbb{R}, \quad I(w) = \int_U \left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf\right) d\lambda_n,$$

bezeichnet man als *Energiefunktional.*

11.2 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und glatt berandet, sei $u \in C^2(\overline{U})$ und sei $w \in C^1(\overline{U})$. Ferner sei $\nabla u = 0$ in ∂U oder $w = 0$ in ∂U. Dann*

$$-\int_U (\Delta u) w \, d\lambda_n = \int_U \langle \nabla u, \nabla w \rangle \, d\lambda_n.$$

Bemerkung. Sei $u \in C^2(\overline{U})$ mit $u|_{\partial U} = 0$ oder $\nabla u|_{\partial U} = 0$. Ferner gebe es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\Delta u = \lambda u$. Dann $\lambda \leq 0$.

11.3 Theorem (Dirichletsches Prinzip). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und glatt berandet. Sei $f \in C(\overline{U})$, sei $g \in C(\partial U)$ und sei $\mathcal{A} = \{w \in C^2(\overline{U}) \mid w = g \text{ in } \partial U\}$. Dann ist $u \in C^2(\overline{U}) \cap \mathcal{A}$ genau dann die Lösung von*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } U \\ u &= g && \text{in } \partial U \end{aligned}$$

wenn

$$I(u) = \min\{I(w) \mid w \in \mathcal{A}\}.$$

Bemerkung. Das Dirichletsche Prinzip liefert keinen Existenzbeweis, weil $\mathcal{A}$ nicht kompakt ist. Noch nicht einmal die Einheitskugel in $C^2(\overline{U})$ ist kompakt.

Die Eindeutigkeit der Lösung der Wärmeleitungsgleichung hatten wir schon mit dem Maximumprinzip gezeigt. Wir machen es noch einmal mit einer Energiemethode.

11.4 Bezeichnung. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit glattem Rand und sei $T > 0$. Wir setzen $U_T = U \times (0, T]$ und $\Gamma_T = \overline{U}_T \setminus U_T$, also $\Gamma_T = \{(x,t) \in \partial U_T \mid t \neq T\}$.

11.5 Theorem. *Seien $f \in C(U_T)$ und $g \in C(\Gamma_T)$. Dann besitzt das gemischte Anfangs- und Randwertproblem*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f && \text{in } U_T \\ u &= g && \text{in } \Gamma_T \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung in $C^2(\overline{U}_T)$.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit der Lösung der Rückwärtsdiffusionsgleichung.

11.6 Satz. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen mit glattem Rand, sei* $T > 0$, $f \in C(U_T)$ *und sei* $g \in C(\Gamma_T)$. *Dann gibt es höchstens eine Lösung* $u \in C^2(\overline{U}_T)$ *des kombinierten Anfangs- und Randwertproblems für die Rückwärtsdiffusionsgleichung*

$$\begin{aligned} u_t + \Delta u &= f && \text{in } U_T \\ u &= g && \text{in } \Gamma_T \end{aligned}$$

11.7 Satz. *Zu jedem* $T > 0$ *gibt es* $g \in C(U)$ *mit* $g|_{\partial U} = 0$, *so dass das Anfangs- und Randwertproblem*

$$\begin{aligned} u_t + \Delta u &= 0 && \text{in } U_T \\ u &= g && \text{in } U \times \{0\} \\ u &= 0 && \text{in } \partial U \times (0, T) \end{aligned}$$

keine Lösung $u \in C^2(\overline{U}_T)$ *besitzt.*

Beweis. Mit den vorhandenen Mitteln ist das eine Übungsaufgabe. □

12 Die Euler-Lagrange Gleichung

12.1 Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand. Eine *Lagrange-Funktion* ist eine glatte Funkion $L\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{U} \to \mathbb{R}$. Die Variablen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{U}$ werden mit $(p_1, \dots, p_n, z, x_1, \dots, x_n) = (p, z, x)$ bezeichnet.

Das Funktional

$$I(w) = \int_U L\big(w_{x_1}(x), \dots, w_{x_n}(x), w(x), x_1, \dots, x_n\big)\, d\lambda_n(x)$$
$$= \int_U L\big(\nabla w(x), w(x), x\big)\, d\lambda_n(x)$$

bezeichnet man als *Energiefunktional.*

Beispiel. Im Beispiel 11.1 war $L(p, z, x) = \frac{1}{2}|p|^2 - z\, f(x)$.

12.2 Bemerkung. Für $g \in C(\partial U)$ sei

$$\mathcal{A} = \{w \in C^2(\overline{U}) \mid w = g \text{ in } \partial U\}.$$

Es gebe ein $u \in \mathcal{A}$ mit $I(u) = \min\{I(w) \mid w \in \mathcal{A}\}$. Fixiere $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Dann besitzt die Funktion

$$h(\tau) = I(u + \tau\varphi)$$

ein Minimum in $\tau = 0$. Ihre Ableitung ist

$$h'(\tau) = \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u + \tau\nabla\varphi, u + \tau\varphi, x)\varphi_{x_i} + L_z(\nabla u + \tau\nabla\varphi, u + \tau\varphi, x)\varphi\; d\lambda_n(x).$$

Also

$$0 = \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x)\varphi_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x)\varphi\; d\lambda_n(x).$$

Wir wenden den Divergenzsatz 4.10 an auf das Vektorfeld $F = L_{p_i}(\nabla u, u, x)\varphi e_i$. Da φ kompakten Träger hat, folgt

$$0 = \int_U \Big(-\sum_{i=1}^n \big(L_{p_i}(\nabla u, u, x)\big)_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x)\Big)\varphi\; d\lambda_n(x).$$

Da dies für alle $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gilt, folgt die *Euler-Lagrange Gleichung*

$$-\sum_{i=1}^n \big(L_{p_i}(\nabla u, u, x)\big)_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 \quad \text{in } U. \tag{12.1}$$

12.3 Beispiel. (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand, sei $f \in C(\overline{U})$. Setze

$$L(p, z, x) = \frac{1}{2}|p|^2 - zf.$$

wie in Beispiel 11.1. Dann $L_{p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_n^2) = p_i$ und daher

$$(L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} = (u_{x_i})_{x_i} = u_{x_i x_i}.$$

Ferner $L_z(p, z, x) = -f$. Die Euler-Lagrange Gleichung lautet also

$$-\Delta u - f = 0.$$

Das ist die Poisson-Gleichung.

(b) Sei U ein beschränktes Intervall, sei $f \in C(\mathbb{R})$ und sei F eine Stammfunktion von f. Wir setzen

$$L(p, z, x) = \frac{1}{2}|p|^2 - F(z).$$

Dann $(L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} = u_{x_i x_i}$ wie oben und $L_z(p, z, x) = -f(z)$. Die Euler-Lagrange Gleichung lautet

$$-\Delta u - f(u) = 0.$$

Das ist die *nichtlineare Poisson-Gleichung.*

(c) Sei nun

$$L(p, z, x) = \sqrt{1 + |p|^2}.$$

Dann ist

$$L_{p_i} = \frac{p_i}{\sqrt{1 + |p|^2}}.$$

Die Euler-Lagrange Gleichung ist dann

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0.$$

Das ist die *Minimalflächengleichung.* Bei der linken Seite handelt es sich um die mittlere Krümmung des Graphen von u.

13 Die Spurabbildung

13.1 Bezeichnung. $\mathrm{dist}(x, A) = \inf\{|y - x| \mid y \in A\}$. Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen setzen wir

$$U_\epsilon = \{x \in U \mid \mathrm{dist}(x, \partial U) > \epsilon\}$$

Jedes Kompaktum $K \subset U$ liegt in einem U_ϵ.

Sei $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $\eta \geq 0$, $\mathrm{Supp}\,\eta \subset B_1(0)$ und $\int_{B_1(0)} \eta \, d\lambda_n = 1$, und sei $\eta_j(x) = j^n \eta(jx)$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $u \in W^{k,p}(U)$. Dann folgt $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ aus der Hölderschen Ungleichung und das Faltungsprodukt $u_j = \eta_j * u$ kann erklärt werden und liegt in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Wir brauchen einen Satz aus der Funktionalanalysis:

13.2 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $1 \leq p < \infty$ ist $\mathcal{D}(U)$ dicht in $L^p(U)$.*

13.3 Satz. *Mit den Bezeichnungen von oben gilt für jedes $\epsilon > 0$*

$$\lim_{j \to \infty} u_j\big|_{U_\epsilon} = u\big|_{U_\epsilon} \quad \textit{in } W^{k,p}(U_\epsilon).$$

13.4 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $1 \leq p < \infty$, und sei $u \in W^{k,p}(U)$. Dann gibt es eine Folge $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$, so dass*

$$\lim_{j \to \infty} u_j = u \quad \textit{in } W^{k,p}(U).$$

$\mathbb{R}^n_- = \{t \in \mathbb{R}^n \mid t_1 < 0\}$

13.5 Lemma. *Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$. Für $t \in \mathbb{R}^n$ mit $t_1 > 0$ definieren wir den Translationsoperator $T_t \colon W^{k,p}(\mathbb{R}^n_-) \to W^{k,p}(\mathbb{R}^n_-)$, $T_t(u)(x) = u(x - t)$. Dann gilt für jedes $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n_-)$*

$$\|u - T_t(u)\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n_-)} \to 0 \quad \textit{wenn } t \to 0.$$

13.6 Lemma. *Seien $V, W \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\Phi \colon W \to V$ von der Klasse C^∞. Dann gibt es zu jedem $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ Funktionen $g_\beta \in C^\infty(W)$, so dass für jedes $f \in C^\infty(V)$ gilt*

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(f \circ \Phi) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \left(f^{(\beta)} \circ \Phi\right) g_\beta.$$

Bemerkung. Im Fall $n = 1$ beschreibt die Formel des Faà di Bruno die genaue Gestalt der g_β.

13.7 Satz. *Seien $X, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass X beschränkt ist und $\overline{X} \subset V$. Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\Phi\colon W \to V$ ein C^∞-Diffeomorphismus.*

(a) *Ist $u \in W^{k,p}(X)$, so ist $u \circ \Phi \in W^{k,p}(\Phi^{-1}(X))$.*

(b) *Wenn $\lim_{j\to\infty} u_j = u$ in $W^{k,p}(X)$, dann $\lim_{j\to\infty} u_j \circ \Phi = u \circ \Phi$ in $W^{k,p}(Y)$.*

13.8 Theorem. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, sei $1 \le p < \infty$ und sei $u \in W^{k,p}(U)$. Dann gibt es eine Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\overline{U}) \cap W^{k,p}(U)$, so dass*

$$\lim_{j\to\infty} u_j = u \quad \text{in } W^{k,p}(U).$$

13.9 Bemerkung. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand und sei $a \in \partial U$. Dann gibt es offene Mengen $V, W \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\Phi\colon W \to V$ mit $a \in V$, $\Phi(W \cap \overline{\mathbb{R}}^n_-) = \overline{U} \cap V$ und $\Phi(W \cap \partial\mathbb{R}^n_-) = \partial U \cap V$. Es sei σ das Oberflächenmaß auf ∂U. Für jedes $f \in L^p(\partial U)$, welches in $\partial U \setminus \overline{V}$ verschwindet, gilt

$$\begin{aligned}&\int_{\partial U} f \, d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\Phi(0, t_2, \ldots, t_n)) \sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}\right)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=2,\ldots,n}} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}\right)^T_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=2,\ldots,n}}\right)} d\lambda_{n-1}(t_2, \ldots, t_n).\end{aligned}$$

13.10 Theorem. *Sei $1 \le p < \infty$ und sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand. Dann existiert eine stetige lineare Abbildung $T\colon W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$ mit $T(f) = f|_{\partial U}$ für jedes $f \in C^\infty(\overline{U})$.*

Bezeichnung. Die Abbildung T aus Theorem 13.10 heißt *Spurabbildung*.

13.11 Korollar. *Sei $U \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Jede Funktion in $W^{1,p}(U)$ besitzt einen stetigen Repräsentanten.*

13.12 Theorem. *Sei $T\colon W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$ wie in Theorem 13.10. Dann $W^{1,p}_0(U) =$* $\ker T$.

13.13 Theorem (Poincaré Ungleichung). *Es $1 \le p < \infty$ und es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand. Dann existiert $C > 0$, so dass für jedes $u \in W^{1,p}_0$ gilt*

$$\|u\|_{L^p(U)} \le \sum_{i=1}^n C \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(U)}.$$

14 Existenz eines Minimierers

14.1 Lemma. *Für ein* q *mit* $1 < q < \infty$ *erfülle die Lagrange-Funktion* L *die Abschätzung*

$$\exists \alpha > 0, \beta \geq 0 \, \forall p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in U : L(p, z, x) \geq \alpha |p|^q - \beta. \tag{14.1}$$

Dann gibt es $\delta > 0$*, so dass mit* $\gamma = \beta \lambda_n(U)$ *gilt*

$$I[w] \geq \delta \|\nabla w\|^q_{L^q(U)} - \gamma. \tag{14.2}$$

Die Abschätzung (14.2) bezeichnet man als *Koerzivitätsbedingung*. Die Koerzivitätsbedingung stellt sicher, dass jede Folge $(w_j)_j$, für die $I(w_j)$ gegen das Infimum konvergiert, beschränkt ist.

14.2 Bemerkung. Wir hatten die folgenden Lagrange-Funktionen betrachtet:

(a) $L = \frac{1}{2}|p|^2 - zf$. Sie ist offenbar koerziv, $q = 2$.

(b) $L = \frac{1}{2}|p|^2 - F(z)$. Sie ist offenbar koerziv, $q = 2$.

(c) $L = \sqrt{1 + |p|^2}$. Ebenfalls koerziv, $q = 1$.

14.3 Beispiel. Für jedes p, jedes k und jedes U ist die abgeschlossene Einheitskugel in $W^{k,p}(U)$ nicht kompakt.

14.4 Definition. Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Sei *Dualraum* E' besteht aus allen stetigen, linearen Abbildungen $y \colon E \to \mathbb{K}$. Die Norm auf E' ist die Operatornorm

$$\|y\| = \sup\{|\langle y, x\rangle| \mid x \in E, \|x\| = 1\}.$$

14.5 Beispiel. Für $1 < p < \infty$ ist der Dualraum des $L^p(U)$ der $L^q(U)$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Das wird in der Funktionalanalysis gezeigt. Für den $x \in \ell^p$ und $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^q$ gilt $\langle T, x\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$.

In der Funktionalanalysis werden wir sehen, dass jeder Banachraum E in natürlicher Weise Unterraum des Dualraums seines Dualraums ist. Wenn diese Einbettung sogar surjektiv ist, ist E *reflexiv*. Wenn wir zeigen, dass $L^q(U)$ der Dualraum des $L^p(U)$ ist, werden wir dabei auch die Reflexivität des $L^p(U)$ zeigen. Der $L^1(U)$ ist dagegen nicht reflexiv.

Man zeigt ferner, dass die Sobolewräume $W^{k,q}(U)$ ebenfalls reflexiv sind.

14.6 Definition. Es sei E ein Banachraum. Eine Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in E *konvergiert schwach* gegen $u \in E$, wenn $\lim_{j\to\infty} \langle y, u_j\rangle = \langle y, u\rangle$ für alle $y \in E'$.

Beispiel. $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine schwache Nullfolge in ℓ^p, obwohl $\|e_j\|_p = 1$ für alle j.

Der folgende Satz von Hilbert (für Hilberträume) und Banach (für Banachräume) wird in der Funktionalanalysis gezeigt

14.7 Theorem. *In einem reflexiven Raum besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

Der nächste Satz ist eine Folgerung aus dem Prinzip von der gleichmäßigen Beschränkheit, welches ebenfalls in der Funktionalanalysis gezeigt wird.

14.8 Satz. *Jede schwach konvergente Folge in einem Banachraum ist beschränkt in der Normtopologie.*

14.9 Satz (Satz von Mazur). *Sei E ein normierter Raum, sei $A \subset E$ konvex und abgeschlossen und sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E, die schwach gegen $u \in E$ konvergiert. Dann $u \in A$.*

14.10 Bezeichnung. Es sei $U \subset R^n$ offen mit glattem Rand. Für $1 < q < \infty$ sei $g \in L^q(\partial U)$. Es sei $T\colon W^{1,q}(U) \to L^q(U)$ die Spurabbildung. Wir bezeichnen die Elemente von

$$\mathcal{A} = \{u \in W^{1,q}(U) \mid T(u) = g\}$$

als *zulässige* Funktionen.

14.11 Satz. *Sei I das Energiefunktional zu einer Lagrange-Funktion L, welche die Koerzivitätsbedingung zu $q \in (1,\infty)$ erfüllt. Dann existiert eine schwach konvergente Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$, so dass der schwache Limes in $\mathcal{A}$ liegt und $\lim_{k\to\infty} I(u_k) = \inf\{I(w) \mid w \in \mathcal{A}\}$.*

Bemerkung. Es gibt keinen Grund zu der Annahme, dass I schwach stetig ist. Daher ist nicht klar, dass der schwache Grenzwert ein Minimierer ist.

14.12 Definition. Eine Funktion $I\colon E \to (-\infty,\infty]$ auf einem normierten Raum E ist *schwach unterhalb folgenstetig*, wenn für jede schwach konvergente Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit schwachem Grenzwert u gilt

$$I(u) \le \liminf_{k\to\infty} I(u_k).$$

Den folgenden Satz zeigen wir ebenfalls in der Funktionalanalysis.

14.13 Theorem (Satz von Rellich). *Jede beschränkte Folge in $W^{1,q}(U)$ besitzt eine in $L^q(U)$ konvergente Teilfolge.*

14.14 Lemma. *Sei* $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *eine schwach konvergente Folge in* $W^{1,q}(U)$. *Dann existiert eine Teilfolge* $(u_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$, *so dass zu jedem* $\epsilon > 0$ *eine messbare Teilmenge* $E_\epsilon \subset U$ *mit* $\lambda_n(U \setminus E_\epsilon) \leq \epsilon$ *existiert, für welche die Folge der Einschränkungen* $(u_{j_k}|_{E_\epsilon})_{k\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig auf* E_ϵ *konvergiert.*

Bemerkung. Es handelt sich um eine Variante des Satzes von Egorow.

14.15 Lemma. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und konvex, und sei* $f \in C^2(U)$ *konvex. Dann gilt für* $y, z \in U$

$$f(y) \geq f(z) + \langle \nabla f(z), y - z \rangle .$$

14.16 Satz. *Es sei* L *eine von unten beschränkte Lagrange-Funktion, so dass für alle Wahlen von* $z \in \mathbb{R}$ *und* $x \in \overline{U}$ *die Funktion* $p \mapsto L(p, z, x)$ *konvex ist. Dann ist das zugehörige Energiefunktional* I *schwach unterhalb folgenstetig.*

14.17 Theorem. *Sei* L *eine Lagrange-Funktion, welche die Koerzivitätsbedingung (14.2) erfüllt und konvex in den* p*-Variablen ist. Die Menge* $\mathcal{A}$ *der zulässigen Funktionen sei nicht leer. Dann gibt es mindestens eine Funktion* $u \in \mathcal{A}$ *mit* $I(u) = \min\{I(w) \mid w \in \mathcal{A}\}$.

Man bezeichnet u als *Minimierer* des Lagrange-Funktionals.

Man kann zeigen (Evans, Theorem 3 in §8.3)

14.18 Theorem. *Wenn die Lagrange-Funktion nicht von* z *abhängt und die folgende, gleichmäßige Konvexitätsbedingung erfüllt*

$$\exists \theta > 0 \, \forall p \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n, x \in U : \sum_{i,j=1}^{n} L_{p_i, p_j}(p, x)\xi_i \xi_j \geq \theta \|\xi\|^2,$$

dann gibt es höchstens einen Minimierer.

15 Regularität von Minimierern

Da Minimierer bloß in $W^{1,q}(U)$ zu liegen brauchen, ist nicht klar, ob und in welchem Sinn sie die Euler-Lagrange Gleichung lösen.

15.1 Bemerkung. Für dieses Kapitel setzen wir voraus, dass es $C > 0$ gibt, so dass für alle $p \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$ und $x \in U$ gilt

$$\begin{aligned} |L(p,z,x)| &\leq C(|p|^q + |z|^q + 1), \\ |\nabla_p L(p,z,x)| &\leq C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1), \\ |L_z(p,z,x)| &\leq C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1). \end{aligned} \tag{15.1}$$

Falls es einen Minimierer $u \in C^2(\overline{U})$ gibt, hatten wir in Bemerkung 12.2 gesehen, dass für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gilt

$$0 = \int_U \left(\sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x)\varphi_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x)\varphi \right) d\lambda_n(x).$$

Wenn $u \in W^{1,q}(U)$, dann ist für jedes i die Funktion $L_{p_i}(\nabla u(x), u(x), x)$ in $L^{q'}(U)$, wobei $q' = \frac{q}{q-1}$; das folgt, wenn man (15.1) wie folgt hinschreibt

$$|\nabla_p L(p,z,x)| \leq C \max(|p|^{q-1}, |z|^{q-1}, 1).$$

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung folgt nun durch Grenzübergang

$$0 = \int_U \left(\sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x)v_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x)v \right) d\lambda_n(x)$$

für alle $v \in W_0^{1,q}(U)$.

15.2 Definition. Eine Funktion $u \in W^{1,p}(U)$ ist eine *schwache Lösung* des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n \left(L_{p_i}(\nabla u, u, x)\right)_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) &= 0 && \text{in } U \\ u &= g && \text{in } \partial U \end{aligned}$$

wenn $u \in \mathcal{A}$ und

$$0 = \int_U \left(\sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x)v_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x)v \right) d\lambda_n(x)$$

für alle $v \in W_0^{1,q}(U)$.

15.3 Beispiel. Poisson-Gleichung:

$$L(p, z, x) = \frac{1}{2}|p|^2 - zf.$$

Dann ist $u \in \mathcal{A}$ eine schwache Lösung, wenn für jedes $v \in W_0^{1,p}(U)$

$$0 = \int_U \Big(\langle \nabla u, \nabla v \rangle - fv \Big) \, d\lambda_n.$$

Speziell gilt das dann auch für $v \in \mathcal{D}(U)$. In diesem Fall

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i} v_{x_i} \, d\lambda_n - \int_U fv \, d\lambda_n.$$

Hierbei ist u_{x_i} die schwache Ableitung. Diese besitzt eine Ableitung im Distributionssinn. Wenn man mit Δu den Lapace-Operator im Distributionssinn bezeichnet, dann ist für alle $v \in \mathcal{D}(U)$ gezeigt

$$0 = \int_U (-\Delta u - f) v \, d\lambda_n,$$

also $-\Delta u = f$ im Distributionssinn. Im allgemeinen Fall ist die Euler-Lagrange Gleichung aber nichtlinear und die schwache Lösung lässt sich nicht über Distributionen erklären.

15.4 Lemma (Youngsche Ungleichung). *Für* $a, b > 0$ *und* $p, q > 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt*

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

15.5 Theorem. *Die Lagrange-Funktion* L *erfülle die Ungleichungen (15.1) und für* $u \in \mathcal{A}$ *gelte* $I(u) = \min\{I(w) \mid w \in \mathcal{A}\}$. *Dann ist* u *eine schwache Lösung des Randwertproblems 15.2.*

Unter Zusatzvoraussetzungen gilt auch die Umkehrung

15.6 Satz. *Für jedes* $x \in U$ *sei die Abbildung* $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $(p, z) \mapsto L(p, z, x)$ *konvex. Dann gilt für jede schwache Lösung* u *des Randwertproblems 15.2*

$$I(u) = \min\{I(w) \mid w \in \mathcal{A}\}.$$

15.7 Bezeichnung. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $V \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\overline{V} \subset U$. Für $0 < |h| < \operatorname{dist}(V, \partial U)$, $x \in V$, $k = 1, \dots, n$ und $u \in L^q(U)$ definieren wir den *Differenzenquotienten* als

$$D_k^h u(x) = \frac{1}{h}(u(x + he_k) - u(x)).$$

15.8 Bemerkung (Partielle Integration für Differenzenquotienten). Sei $u \in L^q(U)$ und sei $\varphi \in \mathcal{D}(V)$. Dann gilt für hinreichend kleine $h \neq 0$

$$\int_V u\, D_k^h \varphi \, d\lambda_n = -\int_V \varphi \, D_k^{-h} u \, d\lambda_n.$$

15.9 Satz. *Sei $1 \leq q < \infty$ und $u \in W^{1,q}(U)$. Dann existiert für jede beschränkte, offene Menge V mit $\overline{V} \subset U$ ein $C > 0$, so dass für $k = 1, \ldots, n$ und $0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V, \partial U)$*

$$\|D_k^h u\|_{L^q(V)} \leq C \|u_{x_k}\|_{L^q(U)}.$$

15.10 Satz. *Sei $1 < q < \infty$, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $V \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\overline{V} \subset U$ und sei $u \in L^q(U)$. Es gebe eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$\|D_k^h u\|_{L^q(V)} \leq C$$

für alle $k = 1, \ldots, n$ und $0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V, \partial U)$. Dann $u \in W^{1,q}(V)$.

15.11 Bezeichnung. Mit $H^2_{\mathrm{loc}}(U)$ bezeichnen wir die Menge aller messbaren Abbildungen $f\colon U \to \mathbb{R}$, so dass für alle beschränkten, offenen Mengen V mit $\overline{V} \subset U$ die Einschränkung $f|_V$ in $H^2(V)$ liegt.

15.12 Bemerkung. Für $a, b, \epsilon > 0$ folgt sofort aus der Youngschen Ungleichung für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$ab = \left((\epsilon p)^{1/p} a\right)\left((\epsilon p)^{-1/p} b\right) \leq \epsilon a^p + \frac{1}{q(\epsilon p)^{q/p}} b^q.$$

15.13 Theorem. *Die Lagrange-Funktion L habe die Gestalt $L(p, z, x) = \widetilde{L}(p) - z f(x)$, wobei $f \in L^2(U)$ und L für ein $C > 0$ die folgenden Ungleichungen erfüllt*

$$\begin{aligned} |\nabla_p L(p)| &\leq C(1 + |p|) && \text{für alle } p \in \mathbb{R}^n \\ |L_{p_i, p_j}| &\leq C && \text{für alle } p \in \mathbb{R}^n,\ i, j = 1, \ldots, n, \\ C \sum_{i,j=1}^n L_{p_i, p_j}(p) \xi_i \xi_j &\geq |\xi|^2 && \text{für alle } p, \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{15.2}$$

Ist nun $u \in H^1(U)$ eine schwache Lösung der Randwertproblems 15.2, so gilt $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(U)$.