Einführung in die Funktionalanalysis

Rüdiger W. Braun

Sommersemester 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Normierte Räume und stetige lineare Abbildungen

Überall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Null ist keine natürliche Zahl.

1.1 Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *Norm* auf E ist eine Funktion $\|\cdot\|\colon E \to [0, \infty)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(N1) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$.

(N2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in E$ (Dreiecksungleichung).

(N3) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

Ein *normierter Raum* $(E, \|\cdot\|)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Norm.

1.2 Bemerkung. Auf einem normierten Raum wird durch

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

eine Metrik definiert. Daher sind alle Begriffe, die für metrische Räume erklärt sind, auch für normierte Räume definiert. Ich wiederhole die wichtigsten:

Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N gibt, so dass $\|x_n - x\| < \epsilon$ für alle $n > N$.

Cauchy-Folge Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N gibt, so dass $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ für alle $n, m > N$.

ϵ-Umgebung Für $\epsilon > 0$ bezeichnet man die Menge

$$B_\epsilon(x) = \{y \in E \mid \|x - y\| < \epsilon\}$$

als *ϵ-Umgebung* von x.

Umgebung Eine Menge U heißt *Umgebung* eines Punktes $x \in E$, wenn U eine ϵ-Umgebung von x umfasst.

Ist $F \subset E$ ein linearer Unterraum eines normierten Raums $(E, \|\cdot\|)$ und ist $\|\cdot\|_F$ die Einschränkung von $\|\cdot\|$ auf F, so ist $(F, \|\cdot\|_F)$ ebenfalls ein normierter Raum.

1.3 Beispiele. (a) Der $\mathbb{K}^n$ sei versehen mit der Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |x_j|.$$

Dann ist $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum.

(b) Allgemeiner sei M eine nicht-leere Menge. Dann ist

$$l^\infty(M) = \left\{(x_n)_{n\in M} \;\middle|\; \sup_{n\in M} |x_n| < \infty\right\},$$

versehen mit der Norm

$$\|(x_n)_{n\in M}\|_\infty = \sup_{n\in M} |x_n|,$$

ein normierter Raum.

(c) Mit c bezeichnet man den Unterraum von $l^\infty(\mathbb{N})$, der aus den konvergenten Folgen besteht. Mit c_0 bezeichnet man den Unterraum von c, der aus den Nullfolgen besteht.

(d) Sei X ein kompakter topologischer Raum (also beispielsweise eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{K}^n$). Dann bezeichnet

$$C(X) = \left\{f\colon X \to \mathbb{K} \;\middle|\; f \text{ stetig}\right\}$$

den Raum der stetigen Funktionen auf X. Wegen der Kompaktheit von X ist $C(X)$ ein Unterraum von $l^\infty(X)$. Wir versehen ihn mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

(e) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Ferner gebe es eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\overline{G} = K$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$C^n(K) = \left\{f \in C(G) \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{alle partiellen Ableitungen von } f \text{ bis einschließlich}\\ \qquad\text{zur Ordnung } n \text{ existieren und sind gleichmäßig stetig}\end{array}\right\}.$$

Aus der Analysis ist bekannt, dass jede gleichmäßig stetige Funktion auf G stetig auf den Abschuss K von G fortgesetzt werden kann. Also in Wirklichkeit $f \in C(K)$. Es besitzt sogar jede Ableitung $f^{(\alpha)}$ mit $|\alpha| \le n$ eine stetige Fortsetzung f_α auf K (ohne dass wir uns dem schwierigen Problem gestellt hätten, in Randpunkten eine Ableitung zu erklären). Wir versehen $C^n(K)$ mit der Norm

$$\|f\|_n = \max_{\alpha\le n} \max_{x\in K} |f_\alpha(x)| = \max_{\alpha\le n} \sup_{x\in G} |f^{(\alpha)}(x)|.$$

Satz. *Sei* $G \subset \mathbb{R}^n$, *sei* $A = \overline{G}$, *und sei* $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ *gleichmäßig stetig. Dann existiert eine stetige Abbildung* $h\colon A \to \mathbb{R}^m$ *mit* $h|_G = f$.

Ein solches h bezeichnet man als *stetige Fortsetzung von* f.

Beweis. Zu $\epsilon = 1$ existiert $\delta > 0$, so dass für $x, y \in G$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < 1$.

Sei nun $z \in A$ beliebig gewählt. Dann existiert $w \in G$ mit $|z - w| < \frac{\delta}{2}$. Die Abbildung f ist auf $B_\delta(w) \cap G$ durch $|f(w)| + 1$ beschränkt. Ist nun eine beliebige Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \to \infty} z_n = z$ gewählt, so ist $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, besitzt also wegen des Satzes von Heine-Borel eine konvergente Teilfolge $(f(z_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$, deren Grenzwert wir ℓ nennen.

Wir setzen $h(z) = \ell$ und müssen zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Folge ist. Sei also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere Folge in G mit Grenzwert z. Dann besitzt auch $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Wir nehmen aus Bequemlichkeit an, dass die Folge bereits selbst konvergiert, und setzen $a = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$. Es ist $a = \ell$ zu zeigen. Wir nehmen zum Widerspruch $a \neq \ell$ an. Dann $\epsilon = |\ell - a| > 0$ und es gibt $\rho > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{4}$ falls $|x - y| < \rho$. Wir wählen x_n und z_{n_k}, so dass $|x_n - z| < \frac{\rho}{2}$, $|z_{n_k} - z| < \frac{\rho}{2}$, $|f(x_n) - a| < \frac{\epsilon}{4}$ und $|f(z_{n_k}) - \ell| < \frac{\epsilon}{4}$. Dann $|z_{n_k} - x_n| < \rho$ und daher $|f(z_{n_k}) - f(x_n)| < \rho$. Damit erhalten wir den folgenden Widerspruch

$$\epsilon = |\ell - a| \leq |\ell - f(z_{n_k})| + |f(z_{n_k}) - f(x_n)| + |f(x_n) - a| < \frac{3}{4}\epsilon.$$

Wir haben gezeigt, dass $h(z)$ unabhängig von der Wahl der Folge erklärt ist. Da man für $z \in G$ die konstante Folge wählen kann, folgt $h|_G = f$.

Nun ist noch die Stetigkeit von h zu zeigen. Wir zeigen sogar die gleichmäßige Stetigkeit. Sei dazu $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f existiert $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ falls $|x - y| < \delta$. Seien nun $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta$ gegeben. Wähle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in G mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \to \infty} y_n = y$. Dann existieren n und m mit $|f(x_n) - h(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ und $|f(y_m) - h(y)| < \frac{\epsilon}{3}$. Dann $|x_n - y_m| < \delta$ und daher

$$|h(x) - h(y)| \leq |h(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y_m)| + |f(y_m) - h(y)| < \epsilon. \qquad \square$$

1.4 Satz. *Seien E und F normierte Räume, und sei $A \colon E \to F$ eine lineare Abbildung. Es sind äquivalent:*

(a) A ist stetig.

(b) A ist gleichmäßig stetig.

(c) Zu jeder Nullumgebung U in F existiert eine Nullumgebung V in E mit $A(V) \subset U$.

(d) Es gibt $C > 0$ mit $\|Ax\| \leq C\|x\|$ für alle $x \in E$.

1.5 Definition. Bei linearen Abbildungen zwischen normierten Räumen werden die Worte „stetig“ und „beschränkt“ synonym verwendet. Stetige lineare Abbildungen zwischen normierten Räumen werden auch als beschränkte *Operatoren* bezeichnet. Für einen beschränkten Operator $A\colon E \to F$ definieren wir

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}. \tag{1.1}$$

Wegen Satz 1.4 ist das Supremum endlich. Alle stetigen linearen Abbildungen von E nach F bilden einen Vektorraum, den wir mit $L(E, F)$ bezeichnen. Man sieht sofort, dass $\|\cdot\|$ aus (1.1) eine Norm auf $L(E, F)$ ist. Sie heißt *Operatornorm*.

Spezialfälle mit eigener Bezeichnung: $L(E) = L(E, E)$ und $E' = L(E, \mathbb{K})$. Die Elemente von E' heißen stetige *Linearformen* oder *Funktionale*.

1.6 Bemerkung. Für $A \in L(E, F)$ und $x \in E$ gilt $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$.

1.7 Satz. *Sei E ein endlich-dimensionaler normierter Raum, und sei F ein beliebiger normierter Raum. Dann ist jede lineare Abbildung $A\colon E \to F$ stetig.*

1.8 Bemerkung. (a) Wenn umgekehrt F endlich-dimensional und E beliebig ist, dann gibt es sehr wohl unstetige lineare Abbildungen von E nach F. Solche Abbildungen kann man mit Hilfe einer Vektorraumbasis von E konstruieren.

(b) Die Bestimmung der Operatornorm von A ist meist auch im endlich dimensionalen Fall trickreich. Derartige Fragen führen in das Gebiet der Banachraumgeometrie.

1.9 Definition. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf E heißen *äquivalent*, wenn es $C > 0$ gibt mit

$$\frac{1}{C}\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_1.$$

1.10 Korollar. *Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent.*

1.11 Definition. Eine lineare Abbildung zwischen normierten Räumen heißt *Isomorphismus*, wenn sie bijektiv und stetig ist und auch ihre Inverse stetig ist.

Bemerkung. Ein Isomorphismus normierter Räume ist also ein Isomorphismus der zu Grunde liegenden Vektorräume, der gleichzeitig ein Homöomorphismus der zugehörigen metrischen Räume ist.

Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem Vektorraum E sind genau dann äquivalent, wenn $\mathrm{id}\colon (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ ein Isomorphismus ist.

1.12 Beispiel. Es sei $K\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{K}$ stetig. Definiere

$$(Tf)(s) = \int_0^1 K(s, t)f(t)dt, \quad f \in C[0, 1], 0 \leq s \leq 1.$$

$T\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$ ist ein stetiger Operator. Es ist ein *Fredholmscher Integraloperator* mit *Kern* K.

2 Banachräume

2.1 Definition. Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Raum.

2.2 Bemerkung. Wenn zwei normierte Räume E und F isomorph sind, dann ist der eine genau dann ein Banachraum, wenn der andere einer ist.

2.3 Beispiele. (a) Der $\mathbb{K}^n$ ist ein Banachraum.

(b) Für jede Menge M ist $\ell^\infty(M)$ ein Banachraum.

Für weitere Beispiele ist der folgende Satz interessant.

2.4 Satz. *(a) Ist E ein Banachraum und F ein abgeschlossener Untervektorraum von E, so ist F ein Banachraum.*

(b) Ist E ein normierter Raum und F ein Untervektorraum von E, der ein Banachraum ist, so ist F abgeschlossen in E.

2.5 Bemerkung. Der Kern eines stetigen linearen Operators ist abgeschlossen (klar). Diese Bemerkung liefert gelegentlich einen einfachen Nachweis der Bedingung aus Teil (a) des Satzes.

2.6 Beispiele. (a) c und c_0 sind Banachräume.

(b) Sei X ein kompakter topologischer Raum. Dann ist $C(X)$ eine Banachraum.

Das ist klar, weil der gleichmäßige Limes einer Folge stetiger Funktionen wieder stetig ist.

(c) Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt von der Form $K = \overline{G}$ für eine offene Menge G. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $C^m(K)$ ein Banachraum.

2.7 Satz. *Sei E ein normierter Raum, sei F ein abgeschlossener Unterraum von E. Dann wird auf E/F wie folgt eine Norm erklärt*

$$\|x + F\| = \inf_{w \in F} \|x + w\|.$$

Falls E vollständig ist, so auch E/F.

2.8 Satz (Homomorphiesatz). *E und G seien normierte Räume, und F sei ein abgeschlossener Unterraum von E. Die Quotientenabbildung werde mit $\pi\colon E \to E/F$ bezeichnet. Für $\varphi \in L(E, G)$ gelte $F \subset \ker \varphi$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $\psi \in L(E/F, G)$ mit $\varphi = \psi \circ \pi$. Es gilt $\|\psi\| \leq \|\varphi\|$.*

3 L^p-Räume

Das Lebesguemaß ist vollständig, das heißt jede Teilmenge einer Nullmenge ist messbar.

3.1 Theorem (Satz von Fubini). *Es sei* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{K}$ *eine messbare Funktion, und es bezeichne* λ^n *das* n*-dimensionale Lebesguemaß.*

(a) *Es gibt Lebesgue-Nullmengen* $N_1, N_2 \subset \mathbb{R}$*, so dass für jedes* $s \in \mathbb{R} \setminus N_1$ *die Funktion* $t \mapsto f(s,t)$ *messbar ist und für jedes* $t \in \mathbb{R} \setminus N_2$ *die Funktion* $s \mapsto f(s,t)$ *messbar ist. Ferner sind die Funktion*

$$s \mapsto \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} |f(s,t)| d\lambda(t), & s \in \mathbb{R} \setminus N_1, \\ 0, & s \in N_1, \end{cases}$$

und die Funktion

$$t \mapsto \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} |f(s,t)| d\lambda(s), & t \in \mathbb{R} \setminus N_2, \\ 0, & t \in N_2 \end{cases}$$

messbar (mit Werten in $[0,\infty]$*).*

(b) *Falls*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(s,t)| \, d\lambda(s) \, d\lambda(t) < \infty,$$

so ist f *integrierbar.*

(c) *Ist* f *integrierbar, so ist* $f_t\colon s \mapsto f(s,t)$ *für fast alle* t *integrierbar,*

$$h\colon t \mapsto \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f_t \, d\lambda, & \textit{falls } f_t \textit{ integrierbar,} \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}} h \, d\lambda.$$

Es ist klar, wie höherdimensionale Versionen des Satzes von Fubini aussehen.

3.2 Theorem (Lemma von Fatou). *Es sei* μ *ein Maß auf* T. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $f_n \colon T \to [0, \infty]$ *messbar. Der punktweise Grenzwert* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ *existiere. Dann ist* f *messbar, und es gilt*

$$\int_T f \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_T f_n \, d\mu.$$

3.3 Beispiel. Setze

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - |t - n|, & \text{falls } n - 1 \le t \le n + 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 1$ für alle n, aber $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

3.4 Theorem (Satz von Beppo Levi, Satz über monotone Konvergenz). *Es sei* μ *ein Maß auf* T. *Seien* $f_1, f_2, \ldots \colon T \to [0, \infty]$ *messbar mit* $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$. *Es sei* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *punktweise. Dann ist* f *messbar mit*

$$\lim_{n\to\infty} \int_T f_n \, d\mu = \int_T f \, d\mu \in [0, \infty].$$

3.5 Theorem (Konvergenzsatz von Lebesgue, Satz von der majorisierten Konvergenz). *Es sei* μ *ein vollständiges Maß auf* T. *Seien* $f_1, f_2, \ldots \colon T \to \mathbb{K}$ *integrierbar mit* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *fast überall. Es existiere ferner eine integrierbare Funktion* g, *so dass für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *die Ungleichung* $|f_n| \le g$ *fast überall gilt. Dann ist* f *integrierbar, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_T f_n \, d\mu = \int_T f \, d\mu.$$

3.6 Definition. Sei μ ein Maß auf T, sei $1 \le p < \infty$. Dann

$$\mathscr{L}^p(T) = \left\{ f \colon T \to \mathbb{K} \text{ messbar} \;\middle|\; \int_T |f|^p < \infty \right\}, \quad \|f\|_p^* = \left(\int_T |f|^p \right)^{1/p}.$$

Dann ist $\mathscr{L}^p(T)$ ein Vektorraum, und $\|f\|_p^*$ erfüllt (N1) und (N2). Falls das Maß nichtleere Nullmengen besitzt, so erfüllt $\|f\|_p^*$ aber nicht (N3), ist also nicht definit. Die Höldersche und die Minkowskische Ungleichung werden in der Analysis III gezeigt.

3.7 Satz (Höldersche Ungleichung). *Sei* $1 < p < \infty$, *sei* q *bestimmt durch*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Für $f \in \mathscr{L}^p(T)$ *und* $g \in \mathscr{L}^q(T)$ *gelten* $fg \in \mathscr{L}^1(T)$ *und*

$$\|fg\|_1^* \le \|f\|_p^* \|g\|_q^*.$$

Bemerkung. Für $p = 2$ gilt auch $q = 2$. In diesem Fall heißt die Höldersche Ungleichung üblicherweise Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

3.8 Satz (Minkowskische Ungleichung). *Für* $f, g \in \mathscr{L}^p$, $1 \leq p < \infty$, *gilt*

$$\|f+g\|_p^* \leq \|f\|_p^* + \|g\|_p^*.$$

3.9 Definition. Sei μ ein Maß auf T, und sei $1 \leq p < \infty$. Setze

$$N_p = \left\{ f\colon T \to \mathbb{K} \;\middle|\; \int_T |f|^p = 0 \right\} = \left\{ f\colon T \to \mathbb{K} \text{ messbar} \;\middle|\; \mu(\{x \mid f(x) \neq 0\}) = 0 \right\}.$$

Dann folgt für $f \in \mathscr{L}^p(T)$ und $g \in N_p$ aus der Minkowskischen Ungleichung

$$\|f+g\|_p^* \leq \|f\|_p^* + \|g\|_p^* = \|f\|_p^* \leq \|f+g\|_p^* + \|-g\|_p^* = \|f+g\|_p^*,$$

also $\|f+g\|_p^* = \|f\|_p^*$ für alle $g \in N$. Wir können daher definieren

$$L^p(T) = \mathscr{L}^p(T)/N_p \qquad \|f\|_p = \|f\|_p^*.$$

3.10 Satz. *Sei* μ *ein Maß auf* T. *Dann ist* $L^p(T)$ *ein Banachraum.*

4 Hilberträume

4.1 Definition. Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E ist eine Abbildung $(\cdot,\text{-})\colon E \times E \to \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(S1) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,y) + \mu(y,z)$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x, y, z \in E$,

(S2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ für alle $x, y \in E$,

(S3) $(x,x) \geq 0$ für alle $x \in E$ und $(x,x) = 0$ genau für $x = 0$.

Das Paar $(E,(\cdot,\text{-}))$ bezeichnet man als *Prähilbertraum.* Durch die Setzung $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ wird E zu einem normierten Raum. Ein *Hilbertraum* ist ein vollständiger Prähilbertraum.

4.2 Lemma. *(a)* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2$ *für alle* $x, y \in E$*,*

(b) $|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$ *für alle* $x, y \in E$ *(*Cauchy-Schwarz Ungleichung*),*

(c) $\|\cdot\|$ *ist eine Norm auf* E*,*

(d) für jedes $y \in E$ *ist* $\Phi(y)\colon x \mapsto (x,y)$ *eine stetige Linearform auf* E *mit* $\|\Phi(y)\| = \|y\|$*.*

Bemerkung. Der Beweis der Cauchy-Schwarz Ungleichung zeigt außerdem, dass Gleicheit genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind.

4.3 Lemma. *In jedem Prähilbertraum gelten die folgenden Identitäten:*

(a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(*Parallelogrammgleichung*),*

*(b) (*Polarisationsgleichngen*)*

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \quad \textit{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R},$$

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2), \quad \textit{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

4.4 Beispiele. (a) Es sei (X,μ) ein Maßraum. Dann ist $L^2(X)$ ein Hilbertraum. Insbesondere sind ℓ^2 und alle $\mathbb{K}^n$, versehen mit der euklidischen Norm $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$, Hilberträume.

(b) Jeder abgeschlossene Unterraum eines Hilbertraums ist ein Hilbertraum.

(c) Beispielsweise besitzt $C[0,1]$ das folgende Skalarprodukt

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Der zugehörige Hilbertraum ist $L^2[0,1]$.

(d) Für $m \in \mathbb{N}$ besitzt der $C^m[0,1]$ das Skalarprodukt

$$(f,g) = \sum_{j=0}^{m} \int_0^1 f^{(j)}(x)\overline{g^{(j)}(x)}\,dx.$$

Seine Vervollständigung ist der Sobolevraum $W_m((0,1)$, den wir später noch ausführlicher betrachten.

4.5 Lemma. *Sei $A \neq \emptyset$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines Hilbertraums E. Dann existiert zu jedem $x \in E$ ein eindeutig bestimmtes $y \in A$ mit $\|x-y\| = \operatorname{dist}(x,A)$.*

4.6 Definition. Zwei Elemente x und y eines Prähilbertraums E heißen *orthogonal*, falls $(x,y)=0$. Man schreibt dann $x \perp y$. Falls F ein Unterraum von E ist, so bezeichnet man

$$F^\perp = \{x \in E \mid x \perp y \text{ für alle } y \in F\}$$

als das *orthogonale Komplement* von F in E.

4.7 Bemerkungen. (a) Das orthogonale Komplement ist offenbar abgeschlossen.

(b) Für orthogonale Elemente $x, y \in E$ gilt der Satz des Pythogoras

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

4.8 Lemma. *Sei F ein Unterraum eines Prähilbertraums E, und seien $x \in E$ und $y \in F$. Dann sind äquivalent*

(a) $\|x-y\| = \operatorname{dist}(x,F)$,

(b) $x - y \in F^\perp$.

4.9 Definition. Sei E ein Prähilbertraum. Zwei Unterräume G und H von E heißen *orthogonal*, wenn $x \perp y$ für $x \in G$ und $y \in H$. Man schreibt dann $G \perp H$.

Eine Abbildung $P \in L(E)$ heißt *Projektion*, wenn $P^2 = P$. (Der Begriff der Projektion macht auch für normierte Räume Sinn.) Eine Projektion heißt *orthogonal*, wenn $\operatorname{Bild} P \perp \ker P$.

4.10 Bemerkung. Aus dem vorstehenden Lemma folgt $\|x - Px\| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Bild} P)$ für jede orthogonale Projektion P in einem Prähilbertraum.

4.11 Satz. *Sei E ein Prähilbertraum.*

(a) Es sei $P\colon E \to E$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung mit $P^2 = P$ und $\operatorname{Bild} P \perp \ker P$. Dann ist P stetig.

(b) Es sei P eine orthogonale Projektion in einem Prähilbertraum, die nicht die Nullabbildung ist. Dann $\|P\| = 1$.

4.12 Definition. Sei E ein normierter Raum. Ein Unterraum $F \subset E$ heißt *komplementiert,* wenn es eine Projektion $P \in L(E)$ mit $\operatorname{Bild} P = F$ gibt.

4.13 Satz. *Seien E ein Hilbertraum und $F \subset E$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist F komplementiert.*

4.14 Bemerkung. (a) Der Beweis des Satzes zeigt, dass es zu jedem abgeschlossenen Unterraum F eines Hilbertraums eine orthogonale Projektion P mit $\operatorname{Bild} P = F$ gibt.

(b) Wenn E ein normierter Raum und X, Y zwei Unterräume mit $E = Y + Y$ sowie $X \cap Y = \{0\}$ sind, dann schreibt man $E = X \oplus Y$.

Bemerkung. Wir haben soeben gesehen, dass jeder abgeschlossene Unterraum eines Hilbertraums komplementiert ist. Lindenstrauss und Tzafriri haben 1971 gezeigt, dass umgekehrt jeder Banachraum, dessen sämtliche abgeschlossenen Unterräume komplementiert sind, isomorph zu einem Hilbertraum ist.

4.15 Korollar. *Seien E ein Hilbertraum und $F \subset E$ ein Unterraum. Dann gelten $\overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$ und $\overline{F} = F^{\perp\perp}$.*

4.16 Theorem (Rieszscher Darstellungssatz für Linearformen auf Hilberträumen). *Seien E ein Hilbertraum und $y \in E'$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $\eta \in E$ mit*

$$y(x) = (x, \eta) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Für dieses η gilt $\|\eta\| = \|y\|$.

5 Orthonormalsysteme

5.1 Definition. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Banachraum heißt *(Schauder)-Basis*, wenn es zu jedem $x \in E$ eine eindeutig bestimmte Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gibt, so dass $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$.

Bemerkung. Vektorraumbasen bezeichnet man als *Hamel-Basen*. Sie spielen in der Funktionalanalysis keine große Rolle.

5.2 Definition. Sei E ein Prähilbertraum. Eine Teilmenge $(e_i)_{i\in I}$ heißt *Orthogonalsystem* in E, falls $e_i \neq 0$ für alle $i \in I$ und $e_i \perp e_j$ für $i \neq j$. Falls zusätzlich noch $\|e\|_i = 1$ für alle $i \in I$, so spricht man von einem *Orthonormalsystem*. Ein Orthonormalsystem heißt *vollständig*, wenn seine lineare Hülle dicht ist. Ein vollständiges Orthonormalsystem wird auch als *Orthonormalbasis* bezeichnet.

5.3 Bemerkung. Sei $(e_i)_{i\in M}$ ein endliches Orthonormalsystem in einem Prähilbertraum E. Dann wird durch $P\colon x \mapsto \sum_{i\in M}(x, e_i)e_i$ eine orthogonale Projektion mit $\operatorname{Bild} P = \operatorname{LH}\{e_i \mid i \in M\}$ gegeben. Für jedes Tupel $(\lambda_i)_{i\in M}$ gilt

$$\Big\|\sum_{i\in M} \lambda_i e_i\Big\|^2 = \Big(\sum_{i\in M} \lambda_i e_i, \sum_{j\in M} \lambda_j e_j\Big) = \sum_{i,j\in M} \lambda_i \bar{\lambda}_j (e_i, e_j) = \sum_{i\in M} |\lambda|^2.$$

Damit ist gezeigt, dass jedes (nicht notwendig endliche) Orthonormalsystem linear unabhängig ist. Da die Projektion P orthogonal ist, folgt ferner für endliches M

$$\sum_{i\in M} |(x, e_i)|^2 = \|Px\|^2 \leq \|P\|^2\|x\|^2 = \|x\|^2.$$

Für $I = \mathbb{N}$ oder endliches I folgt hieraus sofort die *Besselsche Ungleichung*:

$$\sum_{i\in I} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in E.$$

5.4 Satz. *Sei E ein Prähilbertraum, sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in E. Dann sind aquivalent*

(a) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist vollständig,*

(b) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine Schauderbasis,*

(c) für jedes $x \in E$ *gilt die* Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \|x\|^2.$$

Wenn $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vollständig ist, dann gilt* $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ *für alle* x.

5.5 Satz. *Sei* I *eine Indexmenge und* $(e_i)_{i\in I}$ *ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum* H. *Dann ist* $(e_i)_{i\in I}$ *genau dann vollständig, wenn es kein* $x \in H \setminus \{0\}$ *gibt mit* $x \perp e_i$ *für alle* $i \in I$.

5.6 Satz (Gram-Schmidt Orthogonalisierung). *Sei* E *ein Prähilbertraum, sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge linear unabhängiger Elemente von* E. *Dann existiert ein Orthonormalsystem* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$\mathrm{LH}\{x_1, \dots, x_n\} = \mathrm{LH}\{e_1, \dots, e_n\} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

5.7 Definition. Ein Banachraum heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

5.8 Beispiel. (a) Für $1 \le p < \infty$ ist der ℓ^p sparabel. Der c_0 ist separabel. Der ℓ^∞ ist nicht separabel.

(b) Offenbar impliziert die Existenz einer Schauderbasis die Separabilität.

(c) Enflo konstruierte in einem 1973 veröffentlichten Artikel einen separablen Banachraum ohne Basis.

5.9 Satz. *Sei* E *ein separabler Prähilbertraum. Dann besitzt* E *ein höchstens abzählbares, vollständiges Orthonormalsystem.*

5.10 Korollar. *Jeder unendlich-dimensionale, separable Hilbertraum ist isometrisch isomorph zum* ℓ^2.

Beweis. Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H. Setze

$$T\colon H \to \ell^2, \quad x \mapsto \big((x, e_j)\big)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt, dass das Bild von T in der Tat im ℓ^2 liegt und dass T eine Isometrie auf ihr Bild ist. Andererseits rechnet man sofort nach, dass für $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ der Vektor $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$ in H liegt und ein Urbild unter T ist. □

5.11 Definition. Es sei $(\mathcal{A}, \le)$ eine partiell geordnete Menge. Eine *Kette* in $\mathcal{A}$ ist eine total geordnete Teilmenge, also eine Teilmenge, in der je zwei Elemente vergleichbar sind.

5.12 Satz (Zornsches Lemma). *Sei* $(\mathcal{A}, \leq)$ *eine partiell geordnete, nichtleere Menge, in der jede Kette eine obere Schranke besitzt. Dann besitzt* $\mathcal{A}$ *ein maximales Element.*

Wir zeigen als Beispiel für die Anwendung des Zornschen Lemmas den Satz, dass jeder Vektorraum eine (Hamel-)Basis besitzt. Zur Vorbereitung benötigen wir das folgende Lemma.

5.13 Lemma. *Sei* E *ein* k*-Vektorraum und sei* $B \subset E$ *eine linear unabhängige Teilmenge. Dann sind gleichwertig*

(a) B *ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von* E*, d. h. es gibt keine echte Obermenge von* B*, die ebenfalls linear unabhängig ist.*

(b) B *ist eine Basis von* E*.*

5.14 Satz (Basisergänzungssatz). *Es seien* E *ein* k*-Vektorraum und* $M \subset E$ *eine linear unabhängige Teilmenge. Dann gibt es eine Basis* B *von* E *mit* $M \subset B$*.*

5.15 Satz. *Es sei* H *ein Hilbertraum. Jedes Orthonormalsystem in* H *lässt sich zu einer Orthonormalbasis ergänzen.*

Dixmier hat für Prähilberträume ein Gegenbeispiel gegeben.

5.16 Lemma. *Es sei* $(e_i)_{i\in I}$ *ein Orthonormalsystem in einem Prähilbertraum* E*. Für jedes* $x \in E$ *ist die Menge aller* $i \in I$ *mit* $(x, e_i) \neq 0$ *höchstens abzählbar.*

5.17 Definition. Seien E ein normierter Raum, I eine Indexmenge und $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen von I. Man sagt, dass die Reihe $\sum_{i\in I} x_i$ *unbedingt* gegen x konvergiert, wenn

(a) $I_0 = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ höchstens abzählbar ist und

(b) I_0 endlich ist mit $\sum_{i\in I_0} x_i = x$ oder für jede Abzählung $I_0 = \{i_1, i_2, \dots\}$ die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} x_{i_j}$ (im klassischen Sinn) gegen x konvergiert.

5.18 Satz (Besselsche Ungleichung). *Sei* $(e_i)_{i\in I}$ *ein Orthonormalsystem in einem Prähilbertraum* E*. Dann konvergiert für jedes* $x \in E$ *die Reihe* $\sum_{i\in I} |(x, e_i)|^2$ *unbedingt und es gilt*

$$\sum_{i\in I} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2.$$

5.19 Satz. *Es sei* $(e_i)_{i\in I}$ *ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum* H*.*

(a) Für jedes $x \in H$ *konvergiert* $\sum_{i\in I} (x, e_i) e_i$ *unbedingt.*

(b) Durch $P\colon x \mapsto \sum_{i\in I} (x, e_i) e_i$ *wird eine Projektion* $P \in L(H)$ *mit* $\operatorname{Bild} P = \overline{\operatorname{LH}\{e_i \mid i \in I\}}$ *gegeben.*

5.20 Satz. *Es sei* $(e_i)_{i\in I}$ *ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum* H. *Dann sind gleichwertig*

(a) *Das Orthonormalsystem ist vollständig.*

(b) *Wenn* $x \perp e_i$ *für alle* $i \in I$, *dann* $x = 0$.

(c) *Für jedes* $x \in H$ *gilt* $x = \sum_{i\in I}(x, e_i)e_i$.

(d) *Es gilt die Parsevalsche Gleichung*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |(x, e_i)|^2 \quad \textit{für jedes } x \in H.$$

5.21 Definition. Ein Unterraum E eines normierten Raums F heißt *Hyperebene*, wenn er der Kern eines stetigen, linearen, nicht-trivialen Funktionals ist.

5.22 Satz. *Jeder unendlich-dimensionale Hilbertraum ist isomorph zu allen seinen Hyperebenen.*

5.23 Bemerkung. Tomothy Gowers erhielt 1998 die Fields-Medaille unter anderem für das folgende Ergebnis:

Es gibt einen unendlich-dimensionalen Banachraum, der zu keiner seiner Hyperebenen isomorph ist.

5.24 Lemma. *(Abel) Für* $n < m \in \mathbb{Z}$ *seien komplexe Zahlen* $(c_k)_{n+1\le k\le m+1}$ *und* $(s_k)_{n\le k\le m}$ *gegeben. Dann gilt*

$$\sum_{k=n+1}^{m} c_k(s_k - s_{k-1}) = c_{m+1}s_m - c_{n+1}s_n - \sum_{k=n+1}^{m} (c_{k+1} - c_k)s_k.$$

5.25 Lemma. *Seien* X *ein metrischer Raum und* $a_k, c_k \colon X \to \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}_0$, *beschränkte Funktionen. Es gelten*

(a) *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergiert gleichmäßig auf* X *und*

(b) *die Folge* $\left(\sup_{x\in X} \sum_{k=0}^{n} |c_k(x) - c_{k+1}(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist beschränkt.*

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k$ *gleichmäßig auf* X.

5.26 Satz (Abelscher Grenzwertsatz). *Es sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine konvergente Reihe. Dann konvergiert die Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *gleichmäßig auf* $[0, 1]$. *Insbesondere gilt*

$$\lim_{x\nearrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

5.27 Definition. Sei X ein kompakter topologischer Raum. Ein Unterraum $A \subset C(X, \mathbb{R})$ ist eine *Unteralgebra*, wenn A die konstanten Funktionen und zu je zwei Funktionen $f, g \in A$ deren Produkt fg enthält.

5.28 Lemma. *Seien X ein kompakter topologischer Raum und $A \subset C(X, \mathbb{R})$ eine abgeschlossene Unteralgebra. Falls $f \in A$ keine negativen Funktionswerte annimmt, so liegt $\sqrt{f}$ in A.*

5.29 Satz. *Sei X ein kompakter topologischer Raum, und sei A eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(X, \mathbb{R})$. Falls A die Punkte von X trennt, d. h. falls es zu je zwei $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$ gibt, so gilt $A = C(X, \mathbb{R})$.*

5.30 Theorem (Satz von Stone-Weierstraß). *Seien X ein kompakter topologischer Raum und A eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(X, \mathbb{C})$ mit den folgenden Eigenschaften*

(a) A trennt die Punkte von X,

(b) mit f liegt auch $\overline{f}$ in A.

Dann $A = C(X, \mathbb{C})$.

5.31 Theorem (Weierstraßscher Approximationssatz). *Sei $X \neq \emptyset$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann kann jede stetige Funktion auf X gleichmäßig durch Polynome approximiert werden.*

5.32 Definition. Der *Träger* $\operatorname{Supp} f$ einer stetigen Funktion $f\colon X \to \mathbb{K}$ ist gleich

$$\operatorname{Supp} f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Eine *Testfunktion* ist eine Funktion $\varphi \in C^\infty(X)$ mit kompaktem Träger. Der Raum aller Testfunktionen wird mit $\mathcal{D}(X)$ bezeichnet.

5.33 Satz. *Sei λ das Lebesguemaß auf $[0, 1]$. Dann sind die Testfunktionen dicht in $L^p([0, 1], \lambda)$ für $1 \leq p < \infty$.*

Den Beweis holen wir später nach.

5.34 Beispiel. Sei $E = L^2([0, 2\pi])$, versehen mit dem Lebesguemaß. Die Funktionen

$$e_k\colon t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2([0, 2\pi])$.

Die Orthonormalität rechnet man sofort nach. Wir zeigen die Vollständigkeit. Sei S^1 der Einheitskreis. Betrachte

$$T\colon C(S^1) \to L^2[0, 2\pi], \quad f \mapsto g \text{ mit } g(t) = f(e^{it}).$$

Das Bild von T ist dicht in $L^2[0,2\pi]$. Dies folgt leicht aus dem Satz, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ ist. Mit dem Satz von Stone-Weierstraß sieht man aber sofort, dass die Polynome in z und $\bar{z}$ dicht in $C(S^1)$ sind. Wegen $\bar{z} = 1/z$ für $z \in S^1$ folgt die Behauptung.

5.35 Beispiel. Sei $E = L^2([0,2\pi])$, versehen mit dem Lebesguemaß. Die Funktionen

$$\begin{aligned} e_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\ e_k(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kt), && k \in \mathbb{N}, \\ e_k(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kt), && -k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2([0,2\pi])$.

Die Orthonormalität rechnet man sofort nach. Die Vollständigkeit folgt aus dem vorstehenden Beispiel.

5.36 Bemerkung. Für ein $f \in L^2([0,2\pi])$ und $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine der beiden zuletzt vorgestellten Orthonormalbasen bezeichnet man die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (f, e_k)e_k$$

als *Fourierreihe* von f. Es ist sofort klar, dass die Fourierreihe in $L^2([0,2\pi])$ konvergiert. Eine ausführliche Behandlung der Fourierreihen bietet das Buch von Körner, welches dem Proseminar zugrunde gelegen hat.

Ich gebe noch zwei vollständige Orthonormalsysteme ohne Beweis an.

5.37 Beispiel. Die *Legendre-Polynome* sind definiert als

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Sie bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2[-1,1]$.

5.38 Beispiel. Die *Hermite-Polynome* sind definiert als

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die *Hermite-Funktionen* sind definiert als

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^n n!}}e^{-x^2/2}h_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Hermite-Funktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$.

6 Dualräume

6.1 Satz. *Sei E ein normierter Raum. Dann ist sein Dualraum E' ein Banachraum.*

Dieser Satz ist ein Spezialfall des folgenden.

6.2 Satz. *Seien E ein normierter und F ein Banachraum. Dann ist $L(E, F)$ ein Banachraum.*

6.3 Satz. *Für p mit $1 \leq p < \infty$ wähle q mit $1 < q \leq \infty$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt $(\ell^p)' = \ell^q$.*

Genauer gilt folgendes: Die Abbildung

$$T\colon \ell^q \to (\ell^p)', \quad (Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

6.4 Satz. *$c_0' = \ell^1$ mit derselben Abbildung wie Satz 6.3.*

Beweis. Übung. $\square$

Bemerkung. Man kann auch den Dualraum von ℓ^∞ angeben, er ist aber häßlich. Man findet diese Darstellung z.B. im ersten Band der Trilogie von Dunford und Schwartz.

Für $L^p(\mu)$ gilt das Analogon zu Satz 6.3. Einen Beweis findet man in Meise und Vogt, Satz 13.13, oder Werner, Satz II.2.4.

6.5 Satz. *Sei $1 < p < \infty$ und sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Es gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann definiert*

$$T\colon L^q(\mu) \to (L^p(\mu))', \quad (Tg)(f) = \int_\Omega fg \, d\mu,$$

einen isometrischen Isomorphismus.

7 Der Satz von Hahn-Banach

7.1 Definition. (a) Eine *Halbnorm* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E ist eine Funktion $p\colon E \to [0, \infty)$ mit den Eigenschaften

(N1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$.

(N2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in E$ (Dreiecksungleichung).

(b) Ein *sublineares Funktional* auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum E ist eine Funktion $p\colon E \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $\lambda \geq 0$, $x \in E$,

(ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in E$.

7.2 Beispiele. (a) Jede Norm ist eine Halbnorm und jede Halbnorm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist ein sublineares Funktional.

(b) Ein sublineares Funktional, das nicht von dieser Form ist, wird gegeben durch

$$p\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \limsup_{n \to \infty} x_n.$$

7.3 Beispiel. Sei E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei p ein sublineares Funktional auf E. Sei F ein Unterraum von E und sei $y\colon F \to \mathbb{R}$ linear mit

$$y(x) \leq p(x) \text{ für alle } x \in F.$$

Setze

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \Big\{(G, Y) \;\Big|\; & G \text{ Unterraum von } E \text{ mit } F \subset G, \\ & Y\colon G \to \mathbb{R} \text{ linear mit } Y|_F = y \text{ und } Y(x) \leq p(x) \text{ für alle } x \in G\Big\}. \end{aligned}$$

Auf $\mathcal{Z}$ definieren wir wie folgt eine (partielle) Ordnung

$$(G_1, Y_1) \prec (G_2, Y_2) \Leftrightarrow \; G_1 \subset G_2 \text{ und } Y_2|_{G_1} = Y_1.$$

Wir zeigen, dass jede Kette $\mathcal{A} \subset \mathcal{Z}$ ein maximales Element besitzt. Dazu definieren wir $G_0 \subset E$ und $Y_0\colon G_0 \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} G_0 &= \{x \in E \mid \text{ es gibt } (G, Y) \in \mathcal{A} \text{ mit } x \in G\}, \\ Y_0(x) &= Y(x), \text{ falls } x \in G \text{ für ein } (G, Y) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{A}$ eine Kette ist, zeigt man leicht, dass G_0 ein Vektorraum und dass Y_0 wohldefiniert ist. Daher $(G_0, Y_0) \in \mathcal{Z}$. Es ist klar, dass (G_0, Y_0) eine obere Grenze für $\mathcal{A}$ ist. Aus dem Zornschen Lemma folgt, dass $(\mathcal{Z}, \prec)$ ein maximales Element $(G_{\max}, Y_{\max})$ besitzt.

7.4 Lemma. *Es seien* E *ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum,* p *ein sublineares Funktional auf* E, $G \subset E$ *ein Unterraum und* $Y\colon G \to \mathbb{R}$ *linear mit* $Y(x) \le p(x)$ *für alle* $x \in G$. *Dann existiert für jedes* $z \in E \setminus G$ *eine lineare Abbildung* $Y_1\colon H = \mathrm{LH}(G \cup \{z\}) \to \mathbb{R}$ *mit* $Y_1|_G = Y$ *und* $Y_1(x) \le p(x)$ *für alle* $x \in H$.

7.5 Theorem (Satz von Hahn-Banach). *Seien* E *ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum,* p *ein sublineares Funktional auf* E, $F \subset E$ *ein Unterraum und* $y\colon F \to \mathbb{R}$ *ein lineares Funktional mit* $y(x) \le p(x)$ *für alle* $x \in F$. *Dann existiert ein lineares Funktional* Y *auf* E *mit* $Y|_F = y$ *und* $Y(x) \le p(x)$ *für alle* $x \in E$.

7.6 Satz. *Sei* E *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum, sei* p *eine Halbnorm auf* E, *sei* $F \subset E$ *ein Unterraum, und sei* $y\colon F \to \mathbb{K}$ *linear mit* $|y(x)| \le p(x)$ *für alle* $x \in F$. *Dann existiert* $Y\colon E \to \mathbb{K}$ *linear mit* $Y|_F = y$ *und* $|Y(x)| \le p(x)$ *für alle* $x \in E$.

7.7 Korollar. *Sei* E *ein normierter* $\mathbb{K}$*-Vektorraum, sei* $F \subset E$ *ein Unterraum, und sei* $y \in F'$. *Dann existiert* $Y \in E'$ *mit* $Y|_F = y$ *und* $\|Y\| = \|y\|$.

7.8 Korollar. *In jedem normierten Raum* E *existiert zu jedem* $x \in E$, $x \neq 0$, *ein* $y \in E'$ *mit*

$$\|y\| = 1 \textit{ und } y(x) = \|x\|.$$

Speziell trennt E' *die Punkte von* E, *d. h. zu je zwei verschiedenen Punkten* $x_1, x_2 \in E$ *existiert* $y \in E'$ *mit* $y(x_1) \neq y(x_2)$.

7.9 Korollar. *In jedem normierten Raum gilt für jedes* $x \in E$

$$\|x\| = \max\bigl\{|y(x)| \bigm| y \in E',\ \|y\| = 1\bigr\}.$$

7.10 Definition. Es seien E ein normierter Raum und $F \subset E$ ein Unterraum. Der Raum

$$F^\perp = \bigl\{y \in E' \bigm| y(x) = 0 \text{ für alle } x \in F\bigr\}$$

heißt *Annihilator* von F in E'.

7.11 Korollar. *Seien* E *ein normierter Raum und* $F \subset E$ *ein Unterraum. Dann sind äquivalent*

(a) F *ist dicht in* E,

(b) $F^\perp = \{0\}$.

7.12 Satz. *Sei* E *ein normierter Raum, dessen Dualraum* E' *separabel ist. Dann ist auch* E *separabel.*

7.13 Beispiel. Die Abbildung $T\colon \ell^1 \to (\ell^\infty)'$, $(Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ ist isometrisch auf ihr Bild, aber nicht surjektiv.

Der Beweis der Isometrieeigenschaft verläuft wie gehabt. Wir nehmen nun an, die Abbildung T sei surjektiv. Dann besäße der Banachlimes $\Phi \in (\ell^\infty)'$ aus Aufgabe 4 von Blatt 7 ein Urbild $x \in \ell^1$. Eine der Eigenschaften des Banachlimes ist

(i) $\Phi(x) = \Phi(x_2, x_3, x_4, \dots)$ für alle $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^\infty$.

Daher gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = (Tx)(e_n) = \Phi(e_n) = \Phi(0) = 0.$$

Also $x = 0$ im Widerspruch zu $\Phi \neq 0$.

7.14 Definition. Sei E ein Vektorraum. Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt *konvex*, wenn $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ für alle $x, y \in A$ und $\lambda \in [0,1]$.

7.15 Definition. Sei E ein Vektorraum, sei $A \subset E$. Das *Minkowskifunktional* $p_A\colon E \to [0,\infty]$ wird definiert als

$$p_A(x) = \inf\left\{\lambda > 0 \;\middle|\; \frac{x}{\lambda} \in A\right\}.$$

A heißt *absorbierend*, falls $p_A(x) < \infty$ für alle $x \in E$.

7.16 Bemerkung. Ist A die offene Einheitskugel eines normierten Raums E, so ist $p_A = \|\cdot\|$.

7.17 Lemma. *Sei* E *ein normierter Raum und sei* $U \subset E$ *konvex mit* $U_\epsilon(0) \subset U$. *Dann gelten*

(a) $p_U \leq \frac{1}{\epsilon}\|\cdot\|$; *speziell ist* U *absorbierend,*

(b) p_U *ist sublinear,*

(c) ist U *offen, so gilt* $U = p_U^{-1}([0,1))$.

7.18 Lemma. *Sei* E *ein normierter Raum und sei* $V \subset E$ *konvex und offen mit* $0 \notin V$ *. Dann existiert* $y \in E'$ *mit*

$$\operatorname{Re} y(x) < 0 \text{ für alle } x \in V.$$

7.19 Theorem (Hahn-Banach Trennungsatz (Mazur)). *Sei* E *ein normierter Raum.* $V_1, V_2 \subset E$ *seien konvex, außerdem sei* V_1 *offen. Es gelte* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. *Dann existiert* $y \in E'$ *mit*

$$\operatorname{Re} y(v_1) < \operatorname{Re} y(v_2), \quad v_1 \in V_1,\, v_2 \in V_2.$$

7.20 Theorem (strikter Hahn-Banach Trennungsatz (Mazur)). *Sei* E *ein normierter Raum.* $V \subset E$ *sei konvex und abgeschlossen, und sei* $x \notin V$*. Dann existieren* $y \in E'$ *und* $\epsilon > 0$*, so dass*

$$\operatorname{Re} y(x) < \operatorname{Re} y(v) - \epsilon \text{ für alle } v \in V.$$

8 Schwache Konvergenz und Reflexivität

8.1 Notation. Für $T \in E'$ und $x \in E$ schreiben wir $\langle T, x\rangle$ für $T(x)$.

8.2 Definition. Sei E ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* genau dann *schwach* gegen $x \in E$, wenn für jedes $T \in E'$ gilt $\lim_{n\to\infty} \langle T, x_n\rangle = \langle T, x\rangle$.

Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt *schwach abgeschlossen*, wenn für Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die in E schwach gegen x konvergiert, bereits $x \in A$ gilt.

8.3 Bemerkung. (Für Teilnehmer der “Einführung in die Topologie”) Die *schwache Topologie* ist die kleinste Topologie, für die alle Mengen der Form $\{x \in E \mid |\langle T, x-y\rangle| < \epsilon\}$, $T \in E'$, $\epsilon > 0$, $y \in E$, offen sind.

Eine Folge konvergiert genau dann schwach im Sinne der Definition 8.2, wenn sie in der schwachen Topologie konvergiert.

Die schwache Topologie ist i. A. nicht metrisch.

8.4 Bemerkung. Jede konvergente Folge ist auch schwach konvergent. Die Umkehrung gilt aber nicht. Beispielsweise ist die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im ℓ^p, $1 < p < \infty$, eine schwache Nullfolge. Sie konvergiert aber nicht in der Norm.

Daher ist die Einheitssphäre im ℓ^p auch nicht schwach abgeschlossen.

8.5 Lemma. *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im normierten Raum E. Sie konvergiere schwach gegen x und gegen y. Dann gilt $x = y$.*

8.6 Satz. *Es sei E ein normierter Raum, und sei $E'' = (E')'$ sein* Bidual. *Die Abbildung*

$$J\colon E \to E'', \quad J(x)(y) = y(x),$$

ist eine Isometrie auf ihr Bild, d. h. es gilt $\|J(x)\| = \|x\|$ für jedes $x \in E$.

8.7 Definition. Ein normierter Raum E, für den die Abbildung $J\colon E \to E''$ aus Satz 8.6 surjektiv (also ein Isomorphismus) ist, heißt *reflexiv*.

8.8 Bemerkungen. (a) Jeder reflexive normierte Raum ist vollständig.

(b) Wenn E reflexiv ist, so ist $E \cong E''$. Die Umkehrung gilt nicht, denn James hat 1951 einen Raum konstruiert, der isometrisch isomorph zu seinem Bidual, aber nicht reflexiv ist.

8.9 Bemerkung. Sei E ein normierter Raum, sei $J\colon E \to E''$ die isometrische Einbettung in seinen Bidual. Dann einerseits $E \cong J(E)$, andererseits ist $\overline{J(E)}$ ein Banachraum. Wir haben gesehen, dass jeder normierte Raum E dicht in einem Banachraum X liegt, derart, dass die Norm auf E die Einschränkung der Norm auf X ist. Man bezeichnet $\overline{J(E)}$ als *vollständige Hülle* von E.

8.10 Satz. *Sei E ein Banachraum. E ist genau dann reflexiv, wenn E' reflexiv ist.*

8.11 Satz. *Sei μ ein σ-endliches Maß. Für $1 < p < \infty$ sind ℓ^p und $L^p(\mu)$ reflexiv. Dagegen sind c_0, ℓ^1 und ℓ^∞ nicht reflexiv.*

8.12 Satz. *Hilberträume sind reflexiv.*

8.13 Bemerkung. Ein reflexiver Raum ist genau dann separabel, wenn sein Dualraum separabel ist.

Um das Theorem 8.15 auch für nicht separable Räume zeigen zu können, benötige ich noch den folgenden Satz.

8.14 Satz. *Abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume sind reflexiv.*

Das folgende Theorem stammt für den ℓ^2 von Hilbert. Der allgemeine Fall ist von Banach.

8.15 Theorem. *In einem reflexiven Raum E besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

8.16 Satz (Satz von Mazur). *Sei E ein normierter Raum und sei $A \subset E$ konvex und abgeschlossen. Dann ist A schwach abgeschlossen.*

8.17 Bemerkung. In Lemma 9.22 der "Einführung in die partiellen Differentialgleichungen" hatten wir gezeigt

> *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ mit $\langle g, \varphi \rangle = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Dann $g = 0$.*

Seien $1 < p < \infty$ und q der zu p konjugierte Exponent. Dann ist $L^q(U)$ der Dualraum zu $L^p(U)$. Wegen $L^q(U) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(U)$ sagt obiges Lemma, dass $\mathcal{D}(U)^\perp = \{0\}$. Daher ist $\mathcal{D}(U)$ dicht in $L^p(U)$.

Der Schönheitsfehler dieser Überlegung ist, dass sie für $p = 1$ nicht greift und dass ich die Dualität von $L^p(U)$ und $L^q(U)$ nicht gezeigt habe. Für einen vollständigen Beweis verweise ich daher auf Forster, Analysis III, § 12, Corollar zu Satz 6.

9 Der Bairesche Kategoriensatz

9.1 Satz. *Sei* X *ein vollständiger metrischer Raum, sei* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$*, wobei alle* M_n *abgeschlossen sind. Dann besitzt mindestens eine der Mengen* M_n *einen inneren Punkt.*

9.2 Definition. Seien X ein metrischer Raum und M eine Teilmenge von X. M heißt *nirgends dicht* in X, falls $\overline{M}$ keinen inneren Punkt besitzt. M heißt von *erster Kategorie* in X, wenn M abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Andernfalls heißt M von *zweiter Kategorie* in X.

9.3 Theorem (Bairescher Kategoriensatz). *Ein vollständiger metrischer Raum ist von zweiter Kategorie in sich.*

9.4 Definition. Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *offen*, wenn für jede offene Teilmenge U von X die Bildmenge $f(U)$ ebenfalls offen ist. Sie heißt *abgeschlossen*, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge U von X die Bildmenge $f(U)$ ebenfalls abgeschlossen ist.

9.5 Lemma. *Seien* X *und* Y *metrische Räume, sei* X *vollständig. Sei* $f\colon X \to Y$ *stetig mit der folgenden Eigenschaft*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X : \overline{f(B_\epsilon(x))} \supset B_\delta(f(x)). \tag{9.1}$$

Dann ist f *offen.*

9.6 Satz. *Seien* E *ein Banachraum und* F *ein normierter Raum. Die Abbildung* $A\colon E \to F$ *sei linear und stetig und erfülle*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \overline{A(B_\epsilon(0))} \supset B_\delta(0).$$

Dann ist A *offen und surjektiv.*

9.7 Lemma. *Seien* E *und* F *normierte Räume und sei* $A \in L(E, F)$*. Falls* $A(E)$ *in* F *von zweiter Kategorie ist, so existiert zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *mit* $\overline{A(B_\epsilon(0))} \supset B_\delta(0)$.

9.8 Satz. *Seien* E *ein Banachraum und* F *ein normierter Raum. Sei* $A \in L(E, F)$ *so, dass* $A(E)$ *in* F *von zweiter Kategorie ist. Dann ist* A *offen und surjektiv.*

Der Bairesche Kategoriensatz besagt, dass die Bedingung an A automatisch erfüllt ist, falls A surjektiv und F vollständig ist.

9.9 Theorem (Satz von der offenen Abbildung). *E und F seien Banachräume. $A\colon E \to F$ sei linear, stetig und surjektiv. Dann ist A offen.*

9.10 Theorem (Banachscher Isomorphiesatz). *E und F seien Banachräume, $A \in L(E,F)$ sei bijektiv. Dann ist A ein Isomorphismus.*

9.11 Korollar. *E und F seien Banachräume. Für $A \in L(E,F)$ sind äquivalent:*

(a) A ist injektiv und $\operatorname{Bild} A$ *ist abgeschlossen in F,*

(b) es gibt $c > 0$, so dass $\|Ax\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in E$.

9.12 Definition. Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Der *Graph* von f ist die Menge

$$\mathcal{G}(f) = \big\{(x, f(x)) \bigm| x \in X\big\} \subset X \times Y.$$

9.13 Bemerkungen. (a) Falls E und F Vektorräume sind, so ist $\mathcal{G}(f)$ genau dann ein Unterraum von $E \times F$, wenn f linear ist.

(b) Falls X und Y metrische Räume sind und f stetig ist, so ist $\mathcal{G}(f)$ abgeschlossen. Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

9.14 Lemma. *Seien E und F normierte Räume, und sei $A\colon E \to F$ linear. Dann ist $\mathcal{G}(A)$ genau dann abgeschlossen, wenn für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein Element $y \in F$ konvergiert, bereits $y = 0$ gilt.*

9.15 Theorem (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Es seien E und F Banachräume. Die Abbildung $A\colon E \to F$ sei linear, und ihr Graph sei abgeschlossen in $E \times F$. Dann ist A stetig.*

Als Anwendungsbeispiel zeigen wir den folgenden Satz.

9.16 Satz. *Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E. Betrachte die Dualräume $(E, \|\cdot\|_1)'$ und $(E, \|\cdot\|_2)'$ als Unterräume des algebraischen Dualraums E^*. Falls $(E, \|\cdot\|_1)' = (E, \|\cdot\|_2)'$, so sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent.*

9.17 Theorem (Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit). *Seien E ein Banachraum und F ein normierter Raum. Sei $\mathcal{A} \subset L(E,F)$ so, dass* $\sup_{A\in\mathcal{A}}\|Ax\| < \infty$ *für jedes $x \in E$. Dann* $\sup_{A\in\mathcal{A}}\|A\| < \infty$.

9.18 Satz. *Seien* E *ein normierter Raum und* M *eine Teilmenge von* E*, so dass* $\sup_{x\in M}|y(x)| < \infty$ *für jedes* $y \in E'$*. Dann* $\sup_{x\in M}\|x\| < \infty$.

9.19 Definition. Seien E und F normierte Räume.

(a) $M \subset E$ heißt *beschränkt*, wenn $\sup_{x\in M}\|x\| < \infty$.

(b) $M \subset E$ heißt *schwach beschränkt*, wenn $\sup_{x\in M}|y(x)| < \infty$ für alle $y \in F'$.

(c) $\mathcal{A} \subset L(E,F)$ heißt *punktweise beschränkt*, wenn $\{Ax \mid A \in \mathcal{A}\}$ für jedes $x \in E$ beschränkt ist.

9.20 Korollar. *(a) In einem normierten Raum ist jede schwach beschränkte Menge beschränkt.*

(b) Jede punktweise beschränkte Menge in $L(E,F)$ *ist beschränkt, falls* E *ein Banachraum ist.*

Der folgende Satz ist aus dem Buch von Banach (p. 200 der französischen Ausgabe).

9.21 Satz. *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine schwache Nullfolge im* ℓ^p, $1 \le p < \infty$*. Dann gibt es eine Teilfolge mit*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m} x_{n_k}\Big\|_p = O\big(m^{1/p}\big)\,.$$

9.22 Lemma. *Für einen Banachraum* E *sei* $\Phi(E)$ *das Supremum aller* $p \ge 1$*, so dass jede schwache Nullfolge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* E *eine Teilfolge besitzt mit*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m} x_{n_k}\Big\| = O\big(m^{1/p}\big)\,.$$

Dann ist Φ *eine Isomorphieinvariante.*

Beweis. Es sei $T\colon E \to F$ ein Isomorphismus. Dann existiert $A > 0$ mit $\frac{1}{A}\|Tx\| \le \|x\| \le A\|Tx\|$. Es gebe ein $p \ge 1$, so dass jede schwache Nullfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in}$ besitzt, so dass für ein $C > 0$ gilt $\Big\|\sum_{k=1}^{m} y_{n_k}\Big\| \le Cm^{1/p}$. Ist nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwache Nullfolge in E, so ist $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwache Nullfolge in F, besitzt also eine Teilfolge $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\Big\|\sum_{k=1}^{m} Tx_{n_k}\Big\| \le Cm^{1/p}$. Hieraus folgt $\Big\|\sum_{k=1}^{m} x_{n_k}\Big\| \le ACm^{1/p}$. Wir haben gezeigt, dass $\Phi(E) \ge \Phi(F)$. Vertauscht man E und F, erhält man die Behauptung. □

9.23 Beispiel. Für $1 \le p < \infty$ gilt $\Phi(\ell^p) = p$.

9.24 Korollar. *(a) Für* $1 \le p < q \le \infty$ *sind* ℓ^p *und* ℓ^q *nicht isomorph.*

(b) Für $1 \le p \le \infty$ *und* $p \ne 2$ *ist der* ℓ^p *nicht isomorph zu einem Hilbertraum.*

9.25 Satz. *Sei* E *ein Banachraum, sei* F *ein normierter Raum, und sei* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $L(E,F)$. *Falls* $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *für jedes* $x \in E$ *konvergiert, so wird durch*

$$A\colon x \mapsto \lim_{n\to\infty} A_n x$$

ein $A \in L(E,F)$ *gegeben.*

9.26 Lemma. *Seien* E *ein normierter Raum,* F *ein Banachraum und* M *eine dichte Teilmenge von* E. *Gegeben sei eine Folge* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $L(E,F)$ *mit den folgenden Eigenschaften*

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|A_n\| < \infty$,

(b) *für jedes* $x \in M$ *ist* $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* F.

Dann konvergiert $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *für jedes* $x \in E$, *und durch* $A\colon x \mapsto \lim_{n\to\infty} A_n x$ *wird ein* $A \in L(E,F)$ *definiert mit* $\|A\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\|A_n\|$.

9.27 Theorem (Satz von Banach-Steinhaus). *Seien* E *und* F *Banachräume, und sei* M *eine dichte Teilmenge von* E. *Gegeben sei eine Folge* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit den folgenden Eigenschaften*

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}}|y(A_n x)| < \infty$ *für alle* $x \in E$, $y \in F'$,

(b) $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist für jedes* $x \in M$ *eine Cauchyfolge.*

Dann konvergiert $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *für jedes* $x \in E$, *und durch* $A\colon x \mapsto \lim_{n\to\infty} A_n x$ *wird ein* $A \in L(E,F)$ *definiert.*

Als Anwendung zeige ich die Existenz einer stetigen, 2π-periodischen Funktion mit divergenter Fourierreihe.

9.28 Definition. Mit $C_{2\pi}$ werde der Unterraum von $\ell^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ bezeichnet, der aus allen stetigen, 2π-periodischen Funktionen besteht. Für $f \in C_{2\pi}$ und $k \in \mathbb{Z}$ definiere den k-ten *Fourierkoeffizienten* durch

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

Die Reihe

$$t \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ikt}$$

heißt *Fourierreihe* von f. Sie konvergiert in $L^2[0,2\pi]$.

9.29 Satz. *Es gibt eine Funktion* f *in* $C_{2\pi}$, *deren Fourierreihe im Punkt* $t = 0$ *divergiert.*

Beweis. Definiere

$$S_n\colon C_{2\pi} \to C_{2\pi}, \quad S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikt}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt} &= -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = -\frac{1}{2} + \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{2e^{i(n+1)t} - 2 - e^{it} + 1}{2(e^{it} - 1)} \\ &= \frac{2e^{i(n+1)t} - 1 - e^{it}}{2(e^{it} - 1)} = \frac{2e^{i(n+1/2)t} - e^{-it/2} - e^{it/2}}{2(e^{it/2} - e^{-it/2})} = \frac{e^{i(n+1/2)t} - \cos(t/2)}{2i\sin(t/2)}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt} + \overline{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}} = \frac{e^{i(n+1/2)t} - \cos(t/2)}{2i\sin(t/2)} + \frac{e^{-i(n+1/2)t} - \cos(t/2)}{-2i\sin(t/2)} \\ &= \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{2i\sin(t/2)} = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}.\end{aligned}$$

Daher gilt für $f \in C_{2\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt+ikx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin((n+1/2)(t-x))}{\sin((t-x)/2)} dt.$$

Insbesondere haben die Linearformen

$$L_n\colon C_{2\pi} \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto S_n(f)(0),$$

die Darstellung

$$L_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} dt.$$

Wir behaupten, dass $(\|L_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. Setze dazu für festes n

$$\xi_j = \frac{4j+1}{4n+2}\pi, \quad \eta_j = \frac{4j+3}{4n+2}\pi, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Beachte

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \xi_j = \frac{2n+1}{2} \frac{4j+1}{4n+2}\pi = \left(j + \frac{1}{4}\right)\pi, \quad \left(n + \frac{1}{2}\right) \eta_j = \left(j + \frac{3}{4}\right)\pi.$$

Also $|\sin((n+1/2)t)| \geq \sqrt{2}/2$ für $t \in [\xi_j, \eta_j]$. Wähle $\epsilon_j > 0$ so klein, dass $\sin((n+1/2)t) \neq 0$ für $t \in [\xi_j - \epsilon_j, \eta_j + \epsilon_j]$. Beachte, dass $0 < \xi_j < \eta_j < 2\pi$ falls $j \leq 2n$. Wähle $h \in C_{2\pi}$ mit $-1 \leq h \leq 1$ so, dass $h(t) = 1$ falls $\xi_j \leq t \leq \eta_j$ für ein $j < 2n$ und

$h(t) = 0$ falls $t \notin \bigcup_{j=1}^{2n} [\xi_j - \epsilon_j, \eta_j + \epsilon_j]$. Außerdem soll h auf $[\xi_j - \epsilon_j, \eta_j + \epsilon_j]$ dasselbe Vorzeichen haben wie $\sin((n + 1/2)t)$. Dann

$$\begin{aligned} L_n(h) \geq \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_j}^{\eta_j} \left| \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \right| dt \geq \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_j}^{\eta_j} \frac{\sqrt{2}}{t} dt \\ = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \ln \frac{\eta_j}{\xi_j} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{2}{4j+1} \right). \end{aligned}$$

Also $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|L_n\| = \infty$, denn $\ln(1 + x) \geq x/2$ für hinreichend kleine, positive x. Wenn nun die Fourierreihe für jedes $f \in C_{2\pi}$ konvergieren würde, so wäre speziell die Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise beschränkt. Mit dem Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit folgt dann aber auch die Beschränktheit in der Operatornorm, welche wir gerade widerlegt haben. Die Annahme war also falsch, und es gibt Funktionen in $C_{2\pi}$, deren Fourierreihe in 0 nicht konvergiert. $\square$

10 Transponierte Operatoren

10.1 Definition. Seien X und Y normierte Räume, und sei $T \in L(X, Y)$. Der *transponierte Operator* $T' \in L(Y', X')$ wird definiert durch

$$(T'y)(x) = y(Tx), \quad y \in Y', x \in X.$$

Es ist klar, dass in der Tat $T' \in L(Y', X')$. In der Schreibweise mit spitzen Klammern ist T' erklärt durch $\langle T'y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$.

10.2 Beispiele. (a) Das folgende, simple Beispiel ist das in den Anwendungen häufigste:

Sei $\iota\colon X \hookrightarrow Y$ die Einbettung des Unterraums X nach Y. Dann gilt für $y \in Y'$ und $x \in X$ $\iota'(y)(x) = y(\iota x)$. Also $\iota'(y) = y|_X$.

(b) Sei $1 \le p < \infty$, und sei $T \in L(\ell^p)$ der *Linksshift*

$$T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Wir identifizieren $(\ell^p)'$ mit ℓ^q, wobei q der zu p konjugierte Exponent ist. Wir schreiben die Identifikationsabbildungen nicht mehr explizit hin. Dann gilt für $y \in (\ell^p)' = \ell^q$ und $x \in \ell^p$

$$(T'y)(x) = y(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} y_{n-1} x_n = w(x)$$

für

$$w_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ y_{n-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist T' der *Rechtsshift*

$$T'(y_1, y_2, \dots) = (0, y_1, y_2, \dots).$$

(c) Sei $k \in L^2([0,1]^2)$. Sie werden in den Übungen zeigen, dass dann ein Operator $T_k \in L(L^2([0,1]))$ gegeben wird durch

$$T_k(f)(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt.$$

Dann gilt $T_k' = T_{\widetilde{k}}$ für $\widetilde{k}(s,t) = k(t,s)$. Auch das wird in den Übungen gezeigt.

10.3 Satz. *(a) Die Abbildung* $T \mapsto T'$ *von* $L(X,Y)$ *nach* $L(Y',X')$ *ist linear und isometrisch (aber, wie später gezeigt werden wird, i. a. nicht surjektiv).*

(b) $(ST)' = T'S'$ *für* $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$.

10.4 Definition. Es seien E ein normierter Raum und F ein Unterraum vom E'. Der Raum

$$F_\perp = \{x \in E \mid y(x) = 0 \text{ für alle } y \in F\}$$

heißt *Annihilator* von F in E.

Wenn man sich auf reflexive Räume beschränkt, kommt man mit $F^\perp$ aus.

10.5 Satz. *Seien* E *und* F *normierte Räume, und sei* $T \in L(E,F)$. *Dann*

$$\overline{\operatorname{Bild} T} = (\ker T')_\perp.$$

10.6 Korollar. *Seien* E, F *normierte Räume, sei* $T \in L(E,F)$ *ein Operator mit abgeschlossenem Bild. Sei* $y \in F$. *Die Gleichung* $Tx = y$ *besitzt genau dann eine Lösung* x, *wenn die folgenden Implikation gilt:*

$$T'z = 0 \Rightarrow z(y) = 0, \quad z \in F'.$$

10.7 Satz. *Seien* E *und* F *Banachräume, sei* $A \in L(E,F)$. *Falls* $\operatorname{Bild} A$ *abgeschlossen ist, so gelten*

(a) $\operatorname{Bild} A = (\ker A')_\perp$,

(b) $(\operatorname{Bild} A)^\perp = \ker A'$,

(c) $\operatorname{Bild} A' = (\ker A)^\perp$,

(d) $(\operatorname{Bild} A')_\perp = \ker A$.

11 Kompakte Operatoren

11.1 Definition. (a) Eine Teilmenge A eines metrischen Raums heißt *relativ kompakt*, wenn ihr Abschluss kompakt ist.

(b) Seien E und F normierte Räume. Eine lineare Abbildung $A\colon E \to F$ heißt *kompakt*, wenn $A(B_1(0))$ relativ kompakt ist. Wir definieren $K(E,F) = \{A\colon E \to F \mid A \text{ kompakt}\}$ und $K(E) = K(E,E)$.

Um zu zeigen, dass die Identität $\mathrm{id}\colon E \to E$ nicht kompakt ist, wenn E unendliche Dimension hat, benötigen wir etwas Vorbereitung.

11.2 Lemma (Rieszsches Lemma). *Sei F ein abgeschlossener Unterraum des normierten Raums E mit $F \neq E$. Für jedes δ mit $0 < \delta < 1$ existiert $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ und*

$$\|x - u\| \geq 1 - \delta \quad \textit{für alle } u \in F.$$

11.3 Satz. *Für einen normierten Raum E sind äquivalent:*

(a) $\dim E < \infty$*,*

(b) $\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ *ist kompakt,*

(c) jede beschränkte Folge in E besitzt eine konvergente Teilfolge.

Speziell ist $\mathrm{id}\colon E \to E$ *genau dann kompakt, wenn* $\dim E < \infty$*.*

11.4 Satz. *Seien E ein normierter und F ein Banachraum. Dann ist $K(E,F)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L(E,F)$.*

Ein Operator besitzt *endlichen Rang*, wenn die Dimension seines Bildes endlich ist.

11.5 Korollar. *Seien E ein normierter und F ein Banachraum, und sei $T \in L(E,F)$. Falls es eine Folge stetiger linearer Operatoren von endlichem Rang gibt, die gegen T konvergiert, so ist T kompakt.*

Bemerkung. Eine schwierige Frage, die die Funktionalanalysis lange beschäftigt hat, ist, ob die Umkehrung von Korollar 11.5 gilt. Sie wurde 1973 von Enflo mit „nein“ beantwortet. Sein Gegenbeispiel ist außerordentlich kompliziert.

11.6 Beispiel. In den Übungen wurde gezeigt, dass für $k \in L^2([0,1]^2)$ der zugehörige Fredholmsche Integraloperator gegeben wird durch

$$T_k \colon L^2[0,1] \to L^2[0,1], \quad T_k(f)(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)dt.$$

Für jedes k ist T_k kompakt. Das sieht man wie folgt: Für gegebenes $\epsilon > 0$ approximiere k durch eine Treppenfunktion τ mit $\|k-\tau\|_2 < \epsilon$. Dabei dürfen wir die Träger der Treppenstufen sogar als Rechtecke voraussetzen. Es gilt $\|T_k - T_\tau\| = \|T_{k-\tau}\| \leq \|k-\tau\|_2 \leq \epsilon$. Wir zeigen, dass T_τ endliche Bilddimension besitzt. Dazu schreiben wir τ aus

$$\tau = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j \times F_j}.$$

Also wegen $\chi_{E_j \times F_j}(s,t) = \chi_{E_j}(s)\chi_{F_j}(t)$

$$T_\tau(f)(s) = \sum_{j=1}^{N} a_j \int_0^1 \chi_{E_j}(s)\,\chi_{F_j}(t)\,f(t)\,dt = \sum_{j=1}^{N} \Big(a_j \int_{F_j} f(t)\,dt\Big)\chi_{E_j}(s)$$

Also Bild $T_\tau \in LH(\chi_{E_1}, \ldots, \chi_{E_N})$.

11.7 Satz. *Seien* E, F, G *normierte Räume, seien* $T \in L(E,F)$ *und* $S \in L(F,G)$. *Falls eine der beiden Abbildungen* S *oder* T *kompakt ist, so auch die Hintereinanderausführung* $S \circ T$.

11.8 Definition. Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Eine Teilmenge $M \subset C(X)$ heißt *gleichgradig stetig*, wenn

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall f \in M\, \forall x, y \in X : d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

11.9 Theorem (Arzelà-Ascoli). *Sei* X *ein kompakter metrischer Raum, sei* $C(X)$ *mit der Supremumsnorm* $\|\cdot\|_\infty$ *versehen, und sei* M *eine Teilmenge von* $C(X)$, *welche beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig ist. Dann ist* M *kompakt.*

11.10 Theorem (Satz von Schauder). E *und* F *seien Banachräume, und sei* $A \in L(E,F)$. *Dann ist* A *genau dann kompakt, wenn* A' *kompakt ist.*

12 Spektraltheorie für kompakte Operatoren

12.1 Definition. Seien E ein Banachraum und $A \in L(E)$.

(a) Das *Spektrum* von A ist definiert als

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \operatorname{id} - A \text{ ist kein Isomorphismus}\}.$$

$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ ist die *Resolventenmenge* von A.

(b) $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A, wenn es ein $x \in E \setminus \{0\}$ gibt mit $Ax = \lambda x$. Die Menge

$$E_\lambda = \{x \in E \mid Ax = \lambda x\} = \ker(\lambda \operatorname{id} - A)$$

heißt *Eigenraum* von A zum Eigenwert λ. Die von Null verschiedenen Elemente von E_λ heißen *Eigenvektoren* von A zum Eigenwert λ.

12.2 Bemerkung. Die Eigenwerte von A gehören offenbar zu $\sigma(A)$. Falls $\dim E < \infty$, so gilt $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$. Falls $\dim E = \infty$, so enthält das Spektrum im allgemeinen Zahlen, die keine Eigenwerte sind. Betrachte z. B. den Operator

$$A\colon \ell^2 \to \ell^2, \quad x \mapsto \left(\frac{1}{n} x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Er ist injektiv, aber nicht surjektiv. Daher gehört 0 zu $\sigma(A)$, obwohl 0 kein Eigenwert von A ist.

12.3 Lemma. *Seien E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Dann* $\dim \ker(\operatorname{id} - A) < \infty$.

12.4 Satz (Neumannsche Reihe). *Es seien E ein Banachraum und $A \in L(E)$ ein invertierbarer Operator. Falls für $B \in L(E)$ gilt*

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

so ist B invertierbar.

12.5 Korollar. $\rho(A)$ *ist offen und* $\sigma(A)$ *ist abgeschlossen.*

12.6 Lemma. *Seien E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Dann ist* $\operatorname{Bild}(\operatorname{id} - A)$ *abgeschlossen.*

12.7 Definition. (a) Sei E ein Vektorraum und $F \subset E$ ein Unterraum. Die *Kodimension* von F in E ist definiert als $\operatorname{codim} F = \dim E/F$.

(b) Seien E ein Banachraum und $S \in L(E)$. Der Operator S heißt *Fredholm-Operator*, wenn sein Kern endliche Dimension besitzt und sein Bild abgeschlossen ist und endliche Kodimension besitzt.

(c) Für einen Fredholm-Operator S auf E bezeichnet man die Zahl

$$\operatorname{ind}(S) = \dim\ker S - \operatorname{codim}\operatorname{Bild} S$$

als *Index* von S.

12.8 Bemerkung. Sei $E = \mathbb{C}^n$. Dann ist offenbar jeder Operator in $A \in L(E)$ ein Fredholm-Operator. Aus dem Rangsatz folgt sogar $\operatorname{ind}(A) = 0$.

12.9 Satz. *Seien E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Dann ist $\mathrm{id} - A$ ein Fredholm-Operator.*

12.10 Bemerkung. Seien E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Setze $S = \mathrm{id} - A$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$S^n = (\mathrm{id} - A)^n = \mathrm{id} - \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j-1} A^j.$$

Also ist S^n ebenfalls ein Fredholm-Operator. Ferner sind klar

$$\ker(S^{n+1}) \supset \ker(S^n), \quad \operatorname{Bild}(S^{n+1}) \subset \operatorname{Bild}(S^n).$$

12.11 Lemma. *Seien E ein Banachraum, $A \in K(E)$ und $S = \mathrm{id} - A$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\ker(S^m) = \ker(S^n)$ für alle $m \geq n$.*

12.12 Lemma. *Seien E ein Banachraum, $A \in K(E)$ und $S = \mathrm{id} - A$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für $N = \ker S^n$ und $R = \operatorname{Bild} S^n$ folgendes gilt:*

(a) die Kodimension von R in E ist endlich,

(b) $N \cap R = \{0\}$,

(c) $N + R = E$,

(d) $SN \subset N$,

(e) $SR \subset R$,

(f) $S_R \colon R \to R$, $x \mapsto S(x)$, *ist invertierbar,*

(g) $(S|_N)^n = 0$,

(h) $\operatorname{ind} S^n = 0$.

12.13 Lemma. *Sei* E *ein Banachraum. Ein abgeschlossener Unterraum* F_1 *von* E *ist komplementiert, wenn es einen weiteren abgeschlossenen Unterraum* F_2 *von* E *gibt, so dass* $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ *und* $F_1 + F_2 = E$.

Man schreibt dann $E = F_1 \oplus F_2$.

Beweis als Übung. Man sagt dann auch, F_1 sei komplementär zu F_2. Das Komplement ist im allgemeinen nicht eindeutig.

12.14 Lemma. *Seien* E *ein unendlich-dimensionaler Banachraum und* $A \in K(E)$. *Für jedes* $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ *gibt es komplementäre Unterräume* R_λ *und* N_λ *von* E, *welche von* $\lambda \operatorname{id} - A$ *in sich selbst abgebildet werden und für die gelten*

(a) $(\lambda \operatorname{id} - A)|_{R_\lambda} \colon R_\lambda \to R_\lambda$ *ist ein Isomorphismus,*

(b) es gibt ein (von λ *abhängiges)* $n \in \mathbb{N}$, *so dass* $(\lambda \operatorname{id} - A)|_{N_\lambda}^n \equiv 0$,

(c) $\{0\} \neq \ker(\lambda \operatorname{id} - A) \subset N_\lambda$ *und* $\dim N_\lambda < \infty$; *speziell ist* λ *ein Eigenwert von* A.

Ferner gelten $0 \in \sigma(A)$ *und* $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\|\}$.

12.15 Satz. *Sei* E *ein unendlich-dimensionaler Banachraum, und sei* $A \in K(E)$. *Dann gelten*

(a) $0 \in \sigma(A)$,

(b) jedes $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ *ist ein Eigenwert von* A, *und der zugehörige Eigenraum* E_λ *ist endlich-dimensional,*

(c) $\sigma(A) \setminus \{0\}$ *ist höchstens abzählbar; wenn* $\sigma(A) \setminus \{0\}$ *unendlich ist, dann ist* 0 *der einzige Häufungspunkt von* $\sigma(A)$,

(d) für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *gilt* $\operatorname{ind}(\lambda \operatorname{id} - A) = 0$; *speziell gilt für* $\lambda \neq 0$ *die* Fredholmsche Alternative:

$$\lambda \operatorname{id} - A \text{ injektiv } \Leftrightarrow \lambda \operatorname{id} - A \text{ surjektiv.}$$

Das Kapitel wird abgeschlossen durch ein Beispiel zur Fredholmschen Alternative.

12.16 Beispiel. Für $k \in C([0,1]^2)$ betrachten wir den *Volterraschen Integraloperator*

$$T \colon C[0,1] \to C[0,1], \quad Tf(s) = \int_0^s k(s,t) f(t)\, dt.$$

In Aufgabe 2 von Blatt 8 wurde die Kompaktheit von T gezeigt. Für $\lambda \neq 0$ wollen wir die Lösbarkeit der Integralgleichung

$$Tf - \lambda f = g$$

für beliebiges $g \in C[0,1]$ zeigen. Wegen der Fredholmschen Alternative brauchen wir dazu nur die Injektivität von $T - \lambda\,\mathrm{id}$ nachzuweisen. Da wir k durch k/λ ersetzen können, dürfen wir o. E. $\lambda = 1$ annehmen. Sei nun $f \in \ker(T - \mathrm{id})$. Dann gilt

$$|f(s)| = |Tf(s)| \leq \int_0^s |k(s,t)||f(t)|dt \leq s\|k\|_\infty \|f\|_\infty.$$

Wir setzen diese Abschätzung wieder in die Formel für Tf ein

$$|f(s)| = |Tf(s)| \leq \int_0^s |k(s,t)|t\|k\|_\infty \|f\|_\infty dt \leq \frac{s^2}{2}\|k\|_\infty^2 \|f\|_\infty.$$

Durch wiederholtes Einsetzen erhält man schließlich

$$|f(s)| \leq \frac{s^n}{n!}\|k\|_\infty^n \|f\|_\infty \to 0 \quad \text{mit } n \to \infty.$$

Daher $f = 0$. Folglich ist $T - \lambda\,\mathrm{id}$ injektiv und wegen der Fredholmschen Alternative auch surjektiv.

Wir haben außerdem gezeigt, dass $\sigma(T) = \{0\}$, denn 0 ist immer im Spektrum.

13 Beschränkte selbstadjungierte Operatoren

13.1 Definition. Seien E und F Hilberträume, und sei $A \in L(E, F)$. Für jedes $y \in F$ ist $x \mapsto (Ax, y)$ stetig. Aus dem Rieszschen Darstellungsatz folgt daher die Existenz eines eindeutig bestimmten Elements $A^*y \in E$ mit $(Ax, y) = (x, A^*y)$ für alle $x \in E$. Die Abbildung $A^*\colon F \to E$ ist die *Adjungierte* von A.

13.2 Bemerkung. $A^* \in L(F, E)$. Die Linearität ist klar. Aus dem Rieszschen Darstellungsatz wissen wir, dass $\|A^*y\|$ gleich der Norm des Funktionals $x \mapsto (Ax, y)$ ist. Diese ist wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung höchstens gleich $\|A\|\|y\|$. Also $\|A^*\| \le \|A\|$.

13.3 Satz. *E, F und G seien Hilberträume.*

(a) *Die Abbildung $A \mapsto A^*$ ist ein isometrischer, konjugiert-linearer Isomorphismus von $L(E, F)$ auf $L(F, E)$,*

(b) $A^{**} = A$ *für jedes* $A \in L(E, F)$,

(c) $\|A^*A\| = \|A\|^2$ *für jedes* $A \in L(E, F)$,

(d) $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$ *für* $A \in L(E, F)$, $B \in L(F, G)$.

13.4 Definition. E sei ein Hilbertraum. Ein Operator $A \in L(E)$ heißt *selbstadjungiert*, wenn $A = A^*$. Ein Operator $A \in L(E, F)$ heißt *unitär*, wenn $A^* = A^{-1}$.

Bemerkung. Man spricht auch von beschränkten selbstadjungierten Operatoren, um den Unterschied zu den unbeschränkten, d. h. unstetigen selbstadjungierten Operatoren hervorzuheben, mit denen wir uns in der Funktionalanalysis I beschäftigen werden.

13.5 Lemma. *A sei ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum E. Dann gelten*

(a) $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ *für alle* $x \in E$,

(b) $\|A\| = \sup\{|(Ax, x)| \mid \|x\| = 1\}$.

13.6 Satz. *Seien E ein Hilbertraum und $P \in L(E)$ eine Projektion. P ist genau dann orthogonal, wenn P selbstadjungiert ist.*

14 Spektraltheorie für kompakte Operatoren auf Hilberträumen

14.1 Lemma. *Seien* H *ein Hilbertraum und* $A \in L(H)$ *kompakt und selbstadjungiert. Dann ist mindestens eine der beiden Zahlen* $\|A\|$ *oder* $-\|A\|$ *ein Eigenwert von* A.

14.2 Lemma. *Seien* H *ein Hilbertraum und* $A \in L(H)$ *selbstadjungiert. Sei* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ein Eigenvektor von* A. *Dann*

(a) $\lambda \in \mathbb{R}$,

(b) $\ker(\lambda \operatorname{id} - A) = \ker((\lambda \operatorname{id} - A)^n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

14.3 Definition. Seien H ein Hilbertraum und $A \in K(H)$ selbstadjungiert. Eine *Eigenwertfolge* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von A ist eine Folge aller Eigenwerte von A, derart, dass $(|\lambda_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt. Dabei wird jeder einzelne Eigenwert λ so oft aufgezählt, wie $\dim\ker(\lambda \operatorname{id} - A)$ angibt. Falls es nur endlich viele Eigenwerte gibt, wird die Folge durch Nullen aufgefüllt.

14.4 Theorem. *Seien* H *ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum und* $A \in L(H)$ *kompakt und selbstadjungiert. Sei ferner* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Eigenwertfolge von* A. *Dann* $\lambda_n \in \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Ferner existiert ein Orthonormalsystem* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* H, *so dass* $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\cdot, e_n)e_n$, *wobei die Folge in der Operatornorm konvergiert.*

14.5 Satz. *Seien* H *und* G *unendlich-dimensionale Hilberträume, und sei* $A \in K(H, G)$. *Es existieren eine Nullfolge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *in* $[0, \infty)$ *und Orthonormalsysteme* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *in* H *und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *in* G, *so dass*

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(\cdot, e_n)f_n,$$

wobei die Reihe in der Operatornorm konvergiert.

14.6 Korollar. *Seien* H *und* G *Hilberträume. Dann ist jeder Operator in* $K(H, G)$ *Grenzwert eine Folge von Operatoren mit endlichem Rang (also endlichdimensionalem Bild) in der Operatornorm.*

14.7 Bemerkung. Die Darstellung aus Satz 14.5 heißt *Schmidt-Darstellung* von A. Man kann zeigen, dass die Zahlen s_n, $n \in \mathbb{N}_0$, von der Wahl der Orthonormalsysteme unabhängig sind. Sie heißen *singuläre Zahlen* des Operators A.

Die kompakten Operatoren werden danach unterteilt, ob die singulären Zahlen in einem ℓ^p liegen. Diejenigen, für die $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in ℓ^2 liegt, heißen *Hilbert-Schmidt-Operatoren*, diejenigen, für die diese Folge sogar in ℓ^1 liegt, heißen *nuklear*.

15 Soboleväume

15.1 Definition. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen definieren wir $\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{Supp} f \subset \Omega\}$.

15.2 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex und sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann heißt $g \in L^2(\Omega)$ *schwache Ableitung* von f, wenn

$$(g, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \varphi^{(\alpha)}) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Wir schreiben dann $D^\alpha f$ oder $f^{(\alpha)}$ für g.

Beispiel. Sei $\Omega = (-1, 1)$, sei $f(x) = |x|$. Dann ist g mit $g(x) = \operatorname{signum}(x)$ die schwache Ableitung von f. Das rechnet man sofort nach, indem man die Integrale $\int_{-1}^0$ und $\int_0^1$ einzeln partiell integriert.

15.3 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $m \in \mathbb{N}_0$.

(a) $H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid$ für alle α mit $|\alpha| \leq m$ existiert die schwache Ableitung $D^\alpha f$ in $L^2(\Omega)\}$.

(b) $(f, g)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)$ für $f, g \in H^m(\Omega)$.

(c) $H_0^m(\Omega)$ ist der Abschluß von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^m(\Omega)$.

Die Räume $H^m(\Omega)$ und $H_0^m(\Omega)$ heißen *Sobolevräume*.

In der "Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen" hatten wir als Satz 10.7 gezeigt:

15.4 Satz. $H^m(\Omega)$ *und* $H_0^m(\Omega)$ *sind Hilberträume.*

15.5 Beispiel. Sei $I = (-1, 1)$, sei $f \colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$. Dann $f \in H^1(I) \setminus H^2(I)$.

16 Die Fouriertransformation

16.1 Definition. $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$ ist der Raum der *im Unendlichen verschwindenden* stetigen Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$. Er wird mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen.

16.2 Lemma. *$C_0(\mathbb{R}^n)$ ist ein abgeschlossener Unterraum des $\ell^\infty(\mathbb{R}^n)$, insbesondere ein Banachraum.*

16.3 Bezeichnung. Für $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$x\xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j, \quad x^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2, \quad |x| = \Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)^{1/2}.$$

16.4 Definition. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ setze

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Die Funktion $\mathcal{F}f$ heißt *Fouriertransformierte* von f, und die Abbildung $\mathcal{F}$ heißt *Fouriertransformation.*

16.5 Satz. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Ferner ist $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ stetig und linear mit $\|\mathcal{F}\| \le (2\pi)^{-n/2}$.*

16.6 Definition. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, wenn

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha f(x) = 0$$

für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Der Raum

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid D^\beta f \text{ schnell fallend für jedes } \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$$

heißt *Schwartzraum.* Die Elemente von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ heißen *Schwartzfunktionen.*

16.7 Bemerkungen. (a) Der Schwartzraum heißt nach Laurent Schwartz (1915–2002).

(b) Ein Beispiel für eine Schwartzfunktion ist $x \mapsto e^{-x^2}$.

(c) Offenbar $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ für jedes $p \ge 1$.

(d) Eine C^∞-Funktion f ist genau dann eine Schwartzfunktion, wenn

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^m)|D^\alpha f(x)| < \infty \quad \forall\, m \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

(e) Der Schwartzraum ist kein Banachraum, sondern ein Fréchetraum, also ein vollständiger metrischer Vektorraum mit einem konvexen System von Nullumgebungen.

16.8 Lemma. *Für* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *und* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *gelten*

(a) $\mathcal{F}f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $D^\alpha(\mathcal{F}f) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha f)$,

(b) $\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}f$.

16.9 Lemma. *Wenn* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, *dann auch* $\mathcal{F}f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

16.10 Notation. Mit $\gamma(x) = e^{-x^2/2}$ bezeichnen wir den *Gauß-Kern*. Für $a > 0$ setzen wir ferner $\gamma_a(x) = \gamma(ax)$.

Der Gaußkern ist fast die einzige Funktion, deren Fouriertransformierte wir tatsächlich berechnen müssen. Aus der Analysis wissen wir

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\gamma(x)\,dx = 1.$$

16.11 Lemma.

$$\mathcal{F}\gamma = \gamma, \quad (F\gamma_a)(\xi) = \frac{1}{a^n}(\mathcal{F}\gamma)\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

16.12 Lemma. *Für* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

16.13 Theorem. *Die Fouriertransformation ist eine Bijektion von* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *auf sich. Ihre Inverse wird gegeben durch*

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ferner gilt

$$(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)_{L^2} = (f, g)_{L^2} \qquad \textit{(Plancherel-Gleichung).}$$

16.14 Bemerkung. Wir haben gezeigt, dass $\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ für alle $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Da $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, läßt sich $\mathcal{F}$ stetig zu einer Isometrie $\mathcal{F}_2\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Diese Fortsetzung heißt *Fourier-Plancherel-Transformation.* Man beachte, dass $\mathcal{F}_2$ nicht durch die Integralformel gegeben ist. Den Zusammenhang erläutert das nächste Lemma.

16.15 Lemma. *(a) Für* $R > 0$ *setze* $g_R(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|x|\leq R} f(x)e^{-ix\xi}d\xi$*. Dann gilt für jedes* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}_2 f = \lim_{R\to\infty} g_R,$$

wobei Konvergenz im Sinne von $L^2(\mathbb{R}^n)$ *vorliegt.*

(b) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$(\mathcal{F}_2 f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}dx \quad \textit{fast überall.}$$

Wir werden ab sofort darauf verzichten, die Operatoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_2$ zu unterscheiden.

16.16 Lemma. *Sei* $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$*. Dann gilt für* $|\alpha| \leq m$

$$\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F} f.$$

16.17 Satz.

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid (1 + |\xi|^2)^{m/2}\mathcal{F} f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Bemerkung. Diesen Satz kann man verwenden, um $H^s(\mathbb{R}^n)$ für $s \notin \mathbb{N}_0$ zu erklären. Für $s \notin \mathbb{N}_0$ und $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ wird die Definition von $H^s(\Omega)$ allerdings schwieriger. In diesem Fall verwendet man beispielsweise die Methode der komplexen Interpolation. Sie erlaubt es, zu je zwei Banachräumen $F \hookrightarrow E$ eine Schar von Zwischenräumen $[E, F]_\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$, zu konstruieren.

Man braucht reelle positive Sobolev-Ordnungen s für die Untersuchung von Rändern. Für $s > 1/2$ und glatt berandetes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ setzt sich nämlich jedes $f \in H^s(\Omega)$ zu $g \in H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ fort.

Literatur zum Thema ist beispielsweise das Buch "Partial Differential Equations I" vom Micheal E. Taylor.

17 Die Einbettungssätze von Sobolev und Rellich

17.1 Theorem (Sobolev-Lemma). *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und seien* $m, k \in \mathbb{N}_0$ *mit* $m > k + \frac{n}{2}$. *Zu jedem* $f \in H^m(\Omega)$ *existiert ein Repräsentant in* $C^k(\Omega)$.

17.2 Lemma. *Sei* Ω *eine beschränkte, offene Menge im* $\mathbb{R}^n$. *Dann ist die Einbettung* $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ *kompakt.*

17.3 Theorem (Rellichscher Einbettungssatz). *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt und offen und* $m \in \mathbb{N}$. *Dann ist die Einbettung* $H^m_0(\Omega) \hookrightarrow H^{m-1}_0(\Omega)$ *kompakt.*

17.4 Satz. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *ist dicht in* $H^m(\mathbb{R}^n)$.

17.5 Bezeichnung. Wir bezeichnen den offenen Halbraum

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 > 0, x_2, \ldots, x_n \text{ beliebig}\}$$

mit $\mathbb{R}^n_+$.

17.6 Lemma. *Sei* $f \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$. *Definiere für* $\epsilon \geq 0$

$$\tau_\epsilon(f)(x) = \begin{cases} f(x_1 + \epsilon, x_2, \ldots, x_n), & x_1 > -\epsilon, \\ 0, & x_1 \leq -\epsilon. \end{cases}$$

Dann $\tau_\epsilon|_{\mathbb{R}^n_+} \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ *und*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \tau_\epsilon|_{\mathbb{R}^n_+}(f) = f \qquad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n_+).$$

17.7 Lemma. *Sei* $m \in \mathbb{N}$, *sei* $f \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$. *Wähle* $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *mit* $\operatorname{Supp}(\chi) \subset (0, \infty)$ *und* $\chi(t) = 1$ *für alle* $t > 1$. *Setze* $\chi_\epsilon(t) = \chi((t + \epsilon)/\epsilon)$. *Dann ist für jedes* $\epsilon > 0$ *die Funktion*

$$f_\epsilon(x) = \chi_\epsilon(x_1)\tau_\epsilon(f)(x)$$

in $H^m(\mathbb{R}^n)$. *Ferner gilt*

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} f_\epsilon = f \qquad \text{in } H^m(\mathbb{R}^n_+).$$

17.8 Definition.

$$\mathscr{S}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) = \{f|_{\mathbb{R}^n_+} \mid f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\}.$$

17.9 Satz. $\mathscr{S}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *ist dicht in* $H^m(\mathbb{R}^n_+)$.