Funktionalanalysis II

Rüdiger W. Braun

Sommersemester 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Die Friedrichssche Erweiterung

Wiederholung. Sei A ein dicht definierter Operator im Hilbertraum H.

(a) Seine *Adjungierte* ist der auf

$$D(A^*) = \{y \in H \mid x \mapsto \langle Ax, y\rangle \text{ ist stetig auf } D(A)\}$$

durch $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ definierte Operator in H.

(b) A heißt *symmetrisch*, wenn A^* eine Erweiterung von A ist, und *selbstadjungiert*, wenn $A = A^*$.

(c) Ist A symmetrisch, dann bezeichnet man A als *wesentlich selbstadjungiert*, wenn der Abschluss von A selbstadjungiert ist.

1.1 Beispiel. Der Operator B in $H = L^2[0,1]$ sei gegeben durch $D(B) = H_0^1[0,1]$ und $Bf = if'$. Wir hatten in Beispiel 13.5 der Funktionalanalysis I gesehen, dass $B = A^*$, wobei A gegeben war durch $D(A) = H^1[0,1]$ und $Af = if'$. Also ist B symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert. Da B bereits abgeschlossen ist, ist B auch nicht wesentlich selbstadjungiert.

Anderseits zeigt Aufgabe 4 von Blatt 12 der Funktionalanalysis I, dass B selbstadjungierte Erweiterungen besitzt, und zwar für jedes $\lambda \in S^1$ den durch $D(A_\lambda) = \{f \in H^1[0,1] \mid f(0) = \lambda f(1)\}$ und $A_\lambda f = if'$ gegebenen Operator.

Die Friedrichssche Erweiterung stellt eine Methode dar, zu einem symmetrischen Operator eine selbstadjungierte Erweiterung zu konstruieren, ohne dass man dessen Definitionsbereich à priori erraten haben muss. Die Friedrichssche Erweiterung eignet sich vor allem für elliptische Operatoren.

1.2 Definition. Sei A ein symmetrischer Operator im Hilbertraum H. A heißt *monoton*, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass $\langle Au, u\rangle \geq c\|u\|^2$ für alle $u \in D(A)$.

1.3 Definition. A sei ein monotoner Operator im Hilbertraum H. Durch

$$\langle u, v\rangle_E = \langle Au, v\rangle, \quad u, v \in D(A),$$

wird ein Skalarprodukt auf $D(A)$ erklärt. Die Vervollständigung von $(D(A), \|\cdot\|_E)$ ist ein Hilbertraum, der als *energetischer Raum* von A bezeichnet und H_E geschrieben wird.

1.4 Beispiel. (a) Die Operatoren aus Beispiel 1.1 sind nicht monoton. Das sieht man in diesem Fall bereits, wenn man die Eigenwerte bestimmt.

(b) Monotonie steht in Zusammenhang mit der Poincaré-Ungleichung.

1.5 Lemma. *Sei A ein monotoner Operator im Hilbertraum H. Die Einbettung $D(A) \hookrightarrow H$ setzt sich zu einer stetigen Einbettung $H_E \hookrightarrow H$ fort.*

1.6 Beispiel. Sei $H = \ell^2$ und sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende, unbeschränkte Folge in $(0, \infty)$. Der Operator A in H sei gegeben durch $D(A) = \varphi$ und $A((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Er ist monoton. Es gilt $\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle_E = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \overline{y}_n$. Der energetische Raum von A ist also

$$H_E = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \left(\sqrt{\lambda_n}\, x_n \right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \right\}.$$

Es gilt $H_E \subset H$.

1.7 Bemerkung. Da H_E ein dichter Unterraum von H ist, ist H' ein Unterraum von H_E'. Wir wollen dabei H' mit H identifizieren. Das geht kanonisch, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ tut man sich leichter, wenn man die Existenz einer konjugiert linearen isometrischen Involution $J\colon H \to H$ voraussetzt. In diesem Fall ist nämlich $\langle \cdot, J(\text{-}) \rangle$ eine Bilinearform. Falls H ein Funktionenraum ist, kann man $J(f) = \overline{f}$ wählen. Im allgemeinen Fall sei $(b_m)_{m\in M}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von H. Dann kann man setzen $J(\sum_{m\in M} x_m b_m) = \sum_{m\in M} \overline{x}_m b_m$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wählt man $J = \mathrm{id}$.

Wir müssen zusätzlich voraussetzen, dass J mit A vertauscht, d. h.

(a) $x \in D(A)$ genau dann, wenn $Jx \in D(A)$,

(b) $JA = AJ$.

Dann zeigt man in Aufgabe 2 von Blatt 1, dass $J(H_E) \subset H_E$.

1.8 Lemma. *Sei A ein monotoner Operator im Hilbertraum H, sei $J\colon H \to H$ eine konjugiert lineare isometrische Involution wie in Bemerkung 1.7. Dann wird durch*

$$A_E\colon H_E \to H_E', \quad A_E(u)(v) = \langle u, J(v) \rangle_E,$$

ein isometrischer Isomorphismus definiert, der als Energieerweiterung *von A bezeichnet wird.*

Bemerkung. Da die Einbettung $H_E \hookrightarrow H$ dichtes Bild besitzt, ist H' in H_E' eingebettet. Wir identifizieren H' mit H linear isomorph via $T \mapsto u$ für dasjenige u mit $Tv = \langle v, J(u) \rangle$ für alle $v \in H$. Wir definieren die Friedrichssche Erweiterung durch dieselbe Vorschrift wie A_E, aber mit Definitionsbereich $A_E^{-1}(H)$. Die Details behandelt das folgende Lemma.

1.9 Lemma. *Sei A ein monotoner Operator in H. Mit $A_E \colon H_E \to H_E'$ werde die Energieerweiterung von A bezeichnet. Definiere einen Operator A_F in H durch*

$$D(A_F) = \{u \in H_E \mid A_E u \in H'\}, \quad \langle A_F u, Jv\rangle = A_E(u)(v) \textit{ für alle } v \in H_E.$$

Dann ist A_F eine Erweiterung von A, genannt Friedrichssche Erweiterung.

Ich erinnere an Lemma 13.10 aus der Funktionalanalysis I.

1.10 Lemma. *Sei A ein injektiver, dicht definierter Operator von H nach G, dessen Bild dicht in G ist. Dann ist A^* injektiv, A^{-1} ist dicht definiert, und es gilt $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

1.11 Theorem (Friedrichs (1934)). *Sei A ein monotoner Operator in einem Hilbertraum H. Dann ist seine Friedrichssche Erweiterung selbstadjungiert.*

Beweis. Da A_F eine Erweiterung von A ist, ist A_F dicht definiert. Weil $A_E \colon H_E \to H_E'$ surjektiv ist, gilt Bild $A_F = H$. Für $u \in D(A_F)$ gilt

$$\langle A_F u, u\rangle = A_E(u)(Ju) = \langle u, u\rangle_E = \|u\|_E^2 \geq c\|u\|^2.$$

Also existiert $B = A_F^{-1} \colon H \to D(A_F)$ und ist stetig. Wegen Lemma 1.10 genügt es zu zeigen, dass B selbstadjungiert ist. Wegen $D(B) = H$ reicht dazu bereits der Nachweis der Symmetrie. Dazu seien $f, g \in H$ gegeben. Setze $u = Bf$ und $v = Bg$. Das bedeutet $A_F(u) = f$ und somit

$$\langle f, Bg\rangle = \langle A_F u, v\rangle = A_E(u)(Jv) = \langle u, v\rangle_E = \langle Bf, Bg\rangle_E\,.$$

Dasselbe gilt, wenn man f und g vertauscht. Man erhält

$$\langle f, Bg\rangle = \langle Bf, Bg\rangle_E = \overline{\langle Bg, Bf\rangle_E} = \overline{\langle g, Bf\rangle} = \langle Bf, g\rangle\,. \qquad \square$$

1.12 Beispiel. Betrachte den Operator $f \mapsto -f''$ Wir konstruieren die Friedrichssche Erweiterung für den Definitionsbereich $D(A) = \mathscr{D}(0,1)$. Dann gilt für $f, g \in D(A)$

$$\langle f, g\rangle_E = -\int_0^1 f''\overline{g} = \int_0^1 f'\overline{g}'.$$

Für $u \in D(A)$ gilt insbesondere also $\langle Au, u\rangle = \|u'\|_2^2$. Aus Mittelwertsatz und Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt

$$|u(x)| \leq \int_0^x |u'(t)|dt \leq \int_0^1 1|u'(t)|dt \leq \|u'\|_2.$$

Damit ist die Monotonie von A gezeigt. Wir haben außerdem gesehen, dass die energetische Norm äquivalent zur Norm des Sobolevraums $H^1[0,1]$ ist. Das bedeutet $H_E = H_0^1[0,1]$ und $A_E(u)(v) = \int_0^1 u'v'$.

Für beliebiges $u \in D(A_F)$ gibt es $f \in L^2[0,1]$ mit $A_E u = f$. Für beliebiges $\varphi \in D(A)$ bedeutet dies

$$-\int_0^1 u\varphi'' = \int_0^1 u'\varphi' = A_E(u)(\varphi) = \langle f, J\varphi\rangle = \int_0^1 f\varphi.$$

Das bedeutet $u'' = -f$ als schwache Ableitung und daher $u \in H^2[0,1]$. Wir haben gezeigt:

$$D(A_F) = H_0^1(I) \cap H^2(I) = \{f \in H^2(I) \mid f(0) = f(1) = 0\}.$$

Das ist ein anderer Raum als $H_0^2(I)$, weil keine Bedingungen an $f'(0)$ und $f'(1)$ gestellt werden. Man sollte in den meisten Fällen gar nicht erst versuchen, $D(A_F)$ auszurechnen.

1.13 Beispiel. Wie variieren das vorstehende Beispiel zu $D(A) = \{u \in C^2[0,1] \mid u'(0) = u'(1) = 0\}$ und $Au = u - u''$. In diesem Fall

$$\langle Au, u\rangle = \|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2$$

und daher $H_E = H^1[0,1]$ und $\langle u, v\rangle_E = \int_0^1 u\overline{v} + \int_0^1 u'\overline{v}'$. Wenn wir $u \in D(A_F)$ haben, dann existiert $f \in L^2[0,1]$ mit $A_F u = f$. Wir werten das zuerst für $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ aus. In diesem Fall

$$\int_0^1 u\varphi + \int_0^1 u'\varphi' = A_E(u)(\varphi) = \langle f, J\varphi\rangle = \int_0^1 f\varphi.$$

Das bedeutet, dass $u \in H^2[0,1]$ mit $u'' = u - f$ bzw. $A_F u = u - u''$. Ferner ist $A_E u$ stetig bzgl der L^2-Norm. Für beliebiges $g \in C^2[0,1]$ gilt

$$A_E(u)(g) = \int_0^1 ug + \int_0^1 u'g' = \int_0^1 ug + u'(1)g(1) - u'(0)g(0) - \int_0^1 u''g.$$

Das ist nur dann stetig, wenn $u'(1) = u'(0) = 0$. Wir haben gesehen, dass $D(A_F) = \{u \in H^2[0,1] \mid u'(1) = u'(0) = 0\}$.

Aus der Einführung in die partiellen Differentialgleichungen wiederhole ich

1.14 Theorem (Greensche Formeln). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit glattem Rand. Seien $f, g \in C^2(\overline{U})$. Dann*

(a)

$$\int_U f\,\Delta g\,d\lambda_n = -\int_U \langle \nabla f, \nabla g\rangle\,d\lambda_n - \int_{\partial U} f\,\langle \nabla g, \nu\rangle\,d\sigma.$$

(b)

$$\int_U (f\,\Delta g - g\,\Delta f)d\lambda_n = \int_{\partial U} (f\,\langle \nabla g, \nu\rangle - g\,\langle \nabla f, \nu\rangle)\,d\sigma.$$

Hierbei ist ν die äußere Einheitsnormale.

Dieser Satz gilt auch, wenn der Rand nur fast überall glatt ist, beispielsweise, wenn U ein Polygon ist. Eine präzise Formulierung findet man in Kaballo [8], §20.

1.15 Beispiele. Wir konstruieren jetzt Laplace-Operatoren. Dazu sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^∞-Rand oder ein Polygon. Setze $Af = f - \Delta f$.

(a) $D(A) = \mathscr{D}(\Omega)$. Dann folgt aus der Greenschen Identität für $f, g \in D(A)$

$$\langle f, g\rangle_E = \langle f, g\rangle + \langle \nabla f, \nabla g\rangle.$$

Also ist das energetische Skalarprodukt äquivalent zum Skalarprodukt auf $H^1(\Omega)$. Daraus folgt $H_E = H_0^1(\Omega)$. Falls also f für ein $g \in L^2(\Omega)$ die Gleichung $A_F f = g$ löst, so gilt $f|_{\partial\Omega} = 0$. Dass $f \in H^2(\Omega)$ gilt, muss dagegen mit analytischen Mitteln gezeigt werden.

(b) Das Neumannsche Randwertproblem bearbeitet man analog, indem man als Definitionsbereich die Menge $D(A) = \{f \in C^2(\overline{\Omega}) \mid \forall x \in \partial\Omega : \langle \nabla f, \nu\rangle = 0\}$ wählt. In diesem Fall erhält man $H_E = H^1(\Omega)$. Dazu genügt es zu wissen, dass $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $H^1(\Omega)$ ist. Das ist Theorem 13.8 der Einführung in die partiellen Differentialgleichungen im Wintersemester 2013/14.

1.16 Beispiel. Für den Operator A aus Beispiel 1.6 gilt

$$D(A_F) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}.$$

Beweis. Schwierig ist nur "$\subset$". Sei dazu $u \in D(A_F)$ beliebig. Dann existiert $C > 0$, so dass für alle $v \in D(A)$ gilt $|\langle u, v\rangle_E| \leq C\|v\|$. Wendet man dies auf $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$ an, so erhält man

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 |u_j|^2 = |\langle u, v\rangle_E| \leq C\|v\| = C\sqrt{\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 |u_j|^2}.$$

Man dividiert durch die Wurzel, quadriert und findet $\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 |u_j|^2 \leq C^2$. Da dies unabhängig von n gilt, ist $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ gezeigt. □

2 Kompakte Resolventen

2.1 Definition. Seien H ein Hilbertraum und $A \in K(H)$ selbstadjungiert. Eine *Eigenwertfolge* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von A ist eine Folge aller Eigenwerte von A, derart, dass $(|\lambda_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt. Dabei wird jeder einzelne Eigenwert λ so oft aufgezählt, wie $\dim\ker(\lambda\,\mathrm{id} - A)$ angibt. Falls es nur endlich viele Eigenwerte gibt, wird die Folge durch Nullen aufgefüllt.

2.2 Theorem (Einführung in die Funktionalanalysis, Satz 14.5). *Seien H ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum und $A \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Sei ferner $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Eigenwertfolge von A. Dann $\lambda_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner existiert ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H, so dass $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \cdot, e_n\rangle e_n$, wobei die Folge in der Operatornorm konvergiert.*

2.3 Theorem. *Sei A ein monotoner Operator in einem unendlich-dimensionalen Hilbertraum H. Die Einbettung $H_E \hookrightarrow H$ der energetischen Erweiterung H_E nach H sei kompakt. Dann gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $u_n \in D(A_F)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für jedes n ist u_n ein Eigenvektor von A_F, es gibt also $\lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $A_F u_n = \lambda_n u_n$.

(c) Alle λ_n sind reell mit $\lambda_n \geq c$, wobei c die Konstante aus der Monotonieabschätzung in Definition 1.2 ist.

(d) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

(e) $\sigma(A_F) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. Zeige (e): Dann $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \neq 0$, denn A_F ist invertierbar. Im Fall, dass $\lambda\,\mathrm{id} - A_F$ nicht injektiv ist, existiert $u \in D(A_F)$ mit $A_F u = \lambda u$. Dann ist $\mu = 1/\lambda$ ein Eigenwert von B. Falls $\lambda\,\mathrm{id} - A_F$ nicht surjektiv ist, nehmen wir zum Widerspruch an, dass $\frac{1}{\lambda}$ kein Eigenwert von B ist. Ist $f \in H$ beliebig gegeben, so existiert $h \in H$ mit $Bh - \frac{1}{\lambda}h = \frac{1}{\lambda}f$. Setzt man nun $g = Bh$, so gilt $A_F g = h$ und daher $\lambda g - A_F g = \lambda Bh - h = f$. Da dies für jedes f gemacht werden kann, ist $\lambda\,\mathrm{id} - A_F$ doch surjektiv. $\square$

In der Einführung in die Funktionalanalysis haben wir die folgenden Einbettungssätze gezeigt.

2.4 Theorem (Rellichscher Einbettungssatz, Einf. FA Theorem 17.3). *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt und offen und sei* $m \in \mathbb{N}$. *Dann ist die Einbettung* $H_0^m(\Omega) \to H_0^{m-1}(\Omega)$ *kompakt.*

2.5 Theorem (Einf. FA Korollar 17.15). *Wenn* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *eine beschränkte, offene Menge mit* C^∞*-Rand ist, dann ist die Einbettung* $H^m(\Omega) \to H^{m-1}(\Omega)$ *kompakt.*

Theorem 2.5 gilt auch für Polygone. Einige Details und Literaturhinweise findet man in Abschnitt 4 von Kaballo [9].

2.6 Satz. *Die Laplace-Operatoren aus Beispiel 1.15 erfüllen die Voraussetzungen von Theorem 2.3.*

3 Besselfunktionen

3.1 Definition. Für $\nu \in \mathbb{C}$ bezeichnet man die Differentialgleichung

$$w'' + \frac{1}{x}w' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) w = 0$$

als *Besselsche Differentialgleichung*. Die Funktion

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(\nu+j+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

bezeichnet man als *Besselfunktion der Ordnung* ν. Sie löst die Besselsche Differentialgleichung zum selben ν.

Literatur zu Besselfunktionen:

- Olver, F. W. J.: *Asymptotics and Special Functions.* [11] (1974)
- Watson, G. N.: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* [16] (1922)
- Triebel, H.: *Höhere Analysis*, §27. [14] (1972)
- http://dlmf.nist.gov/

Die Besselsche Differentialgleichung besitzt für jedes ν zwei linear unabhängige Lösungen. Man wählt üblicherweise die *Webersche Funktion* Y_ν, auch als *Besselsche Funktion zweiter Art* bezeichnet, als zweite. Die Webersche Funktion ist für $\nu \notin \mathbb{Z}$ definiert als

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ setzt man $Y_n = \lim_{\nu \to n} Y_\nu$. Für $x \to 0$ sind alle Y_ν, $\nu \geq 0$, unbeschränkt.

3.2 Definition. (a) Auf $[0, 1]$ wird durch

$$\mu(E) = \int_E t \, d\lambda_1(t)$$

ein Borelmaß gegeben. Den zugehörigen Hilbertraum $L^2([0, 1], \mu)$ schreiben wir $L^2([0, 1], t)$.

(b) Für $\nu \geq 0$ wird der *Besselsche Differentialoperator* B_ν als Operator in $H = L^2([0,1], t)$ wie folgt gegeben:

$D(B_\nu)$ besteht aus allen Funktionen der Form $f(t) = t^\nu u(t)$ mit $u \in C^\infty([0,1])$ und $u'(0) = u(1) = 0$, und

$$B_\nu(f)(t) = -f''(t) - \frac{1}{t}f'(t) + \frac{\nu^2}{t^2}f(t).$$

3.3 Satz. *Für $\nu > 0$ ist B_ν ein monotoner Operator und für jedes $\delta > 0$ ist $\delta \operatorname{id} + B_0$ ein monotoner Operator.*

3.4 Bemerkung. Der Beweis zeigt $\langle f, g\rangle_E = \int_0^1 f' t \overline{g}' + \int_0^1 \frac{\nu^2}{t} f\overline{g}$ für $\nu \neq 0$ und $\langle f, g\rangle_E = \int_0^1 f' t\overline{g}' + \delta \int_0^1 f\overline{g}$ für $\nu = 0$, wobei im letzteren Fall das energetische Skalarprodukt für den Operator $\delta \operatorname{id} + B_0$ gemeint ist.

3.5 Lemma. *Die Einbettung $H_E \hookrightarrow H$ ist kompakt.*

3.6 Lemma. *Sei $\nu > 0$ und sei $u \in D((B_\nu)_F)$. Dann ist u zweimal schwach differenzierbar mit $(B_\nu)_F u = -u'' - \frac{1}{t}u' + \frac{\nu^2}{t^2}u$.*

Im Fall $\nu = 0$ sei $u \in D((\delta \operatorname{id} + B_0)_F)$. Dann ist u zweimal schwach differenzierbar mit $(\delta \operatorname{id} + B_0)_F u = \delta u - u'' - \frac{1}{t}u'$.

In beiden Fällen besitzt u eine Punktauswertung in 1 und es gilt $u(1) = 0$.

Wir bezeichnen ab jetzt die Abbildung $(\delta \operatorname{id} + B_0)_F - \delta \operatorname{id}$ mit $(B_0)_F$.

3.7 Satz. *u ist genau dann ein Eigenvektor von $(B_\nu)_F$ zum Eigenwert λ, wenn $\sqrt{\lambda}$ eine Nullstelle von J_ν ist und es ein $A \neq 0$ gibt, so dass $u(t) = AJ_\nu(\sqrt{\lambda}t)$.*

3.8 Bemerkung. Weil $L^2([0,1], t)$ unendlich-dimensional ist, besitzt J_ν für jedes $\nu \geq 0$ unendlich viele Nullstellen, die sich nicht häufen. Wir bezeichnen sie mit

$$\lambda_1^{(\nu)} < \lambda_2^{(\nu)} < \lambda_3^{(\nu)} < \cdots < \infty.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen linearer Differentialgleichungen sind alle diese Nullstellen einfach. Zwischen je zwei Nullstellen liegt wegen des Satzes von Rolle mindestens eine Nullstelle der Ableitung. Man kann zeigen, dass es genau eine ist (Watson [16], 15·33).

3.9 Satz. *Die Funktionen $\left(J_\nu(\lambda_n^{(\nu)}t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem in $L^2([0,1], t)$.*

4 Eigenwerte des Laplace-Operators in beschränkten Gebieten

4.1 Theorem. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *ein beschränktes, offenes Gebiet mit* C^∞*-Rand oder ein Polygon. Dann gibt es eine unbeschränkte, monoton wachsende Folge* $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ *und ein in* $L^2(\Omega)$ *vollständiges Orthogonalsystem* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, so dass* $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *mit* $\Delta u_n = -\lambda u_n$ *und* $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Beweis. Das meiste ist bereits gezeigt. Die Aussage $u_n \in C^\infty(\Omega)$ erhält man aus dem folgenden Ergebnis aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Für die Stetigkeit bis zum Rand muss man mit Barrieren argumentieren. Diese Theorie findet man z. B. in dem Buch von F. John [7]. □

4.2 Theorem (Evans [5], 6.3 Theorem 2). *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *beschränkt, sei* $m \in \mathbb{N}_0$ *und sei* $f \in H^m(\Omega)$*. Wenn* $u \in H^1(\Omega)$ *eine schwache Lösung von* $\Delta u = f$ *ist, dann* $u \in H^{m+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$*, d. h. für jedes* $x \in \Omega$ *gibt es eine Umgebung* V *von* x *mit* $V \subset \Omega$*, so dass* $u|_V \in H^{m+2}(V)$.

4.3 Beispiel. Wir bestimmen die Eigenwertfolge für den Laplace-Operator mit Dirichlet Randwerten für den Einheitskreis $\mathbb{D}$. Man macht dazu in Polarkoordinaten den Separationsansatz $u(r, \varphi) = v(r)w(\varphi)$. Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten ist

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}u_r = v''(r)w(\varphi) + \frac{1}{r^2}v(r)w''(\varphi) + \frac{1}{r}v'(r)w(\varphi).$$

Die Gleichung $\Delta u = -\lambda u$ transformiert sich zu

$$r^2\frac{v''(r)}{v(r)} + r\frac{v'(r)}{v(r)} + \lambda r^2 = -\frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)},$$

wo $u(r, \varphi) \neq 0$. Beide Seiten sind also konstant. Die rechte Seite liefert $w(\varphi) = a\cos(A\varphi)+b\sin(A\varphi)$ für ein geignetes A. Da w periodisch sein muss, ist A ganz. Da negative A nicht zu neuen Lösungen führen, haben wir $w(\varphi) = a\cos(n\varphi)+b\sin(n\varphi)$. Damit erhalten wir für v die Differentialgleichung

$$v'' + \frac{1}{r}v' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)v = 0.$$

Durch Substitution wie zuvor finden wir $v(r) = cJ_n(\sqrt{\lambda}r) + dY_n(\sqrt{\lambda}r)$. Der zweite Term ist unbeschränkt und der erste erfüllt die Randbedingung $v(1) = 0$ nur, falls $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$. Also

$$u = \alpha J_n(\sqrt{\lambda}r)\cos(n\varphi + \varphi_0),$$

wobei $\alpha \neq 0$ und $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ beliebig sind und $\sqrt{\lambda}$ eine Nullstelle von J_n ist.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$ setze

$$u_{n,m} = J_n\big(\lambda_m^{(n)} r\big)\ \cos(n\varphi)$$

und für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ setze

$$v_{n,m} = J_n\big(\lambda_m^{(n)} r\big)\ \sin(n\varphi).$$

Dann sind $u_{n,m}$ und $v_{n,m}$ Eigenfunktionen des Laplace-Operators zum Eigenwert $\lambda_m^{(n)}$.

4.4 Satz. *Die Funktionen* $\{u_{n,m}\}_{n\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{N}} \cup \{v_{n,m}\}_{n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}}$ *bilden ein vollständiges Othogonalsystem im* $L^2(\mathbb{D})$.

Bemerkung. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. Wir wissen aber nicht, ob die $\lambda_m^{(n)}$ allesamt verschieden sind. Diese Aussage wird als Bourget's Hypothesis bezeichnet. Die Bourgetsche Vermutung ist richtig. Sie folgt aus Transzendenzaussagen für die Besselfunktionen, die C. L. Siegel im Jahr 1929 gezeigt hat. (Siehe Baker [1], Theorem 11.1.)

4.5 Beispiel. Wir bestimmen nun die Eigenwerte des Laplace-Operators mit Dirichlet Randbedingungen auf dem Rechteck $\Omega = [0,a] \times [0,b]$. Durch Separationsansatz findet man sofort die Eigenfunktionen

$$u_{n,m}(x,y) = \sin\Big(\frac{n\pi x}{a}\Big)\sin\Big(\frac{m\pi y}{b}\Big),\ n,m \in \mathbb{N}.$$

Der zugehörige Eigenwert ist

$$\lambda_{n,m} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right).$$

Für $R > 0$ sei $N(R) = \#\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid \lambda_{n,m} \le R\}$. Wir wollen $N(R)$ näherungsweise bestimmen: Es gilt $\lambda_{n,m} \le R$ genau dann, wenn

$$\frac{n^2\pi^2}{a^2 R} + \frac{m^2\pi^2}{b^2 R} \le 1,$$

wenn also der Punkt (n,m) im Schnitt S des ersten Quadranten mit der Ellipse mit den Halbachsen $\frac{a\sqrt{R}}{\pi}$ und $\frac{b\sqrt{R}}{\pi}$ liegt. Der Flächeninhalt von S beträgt $\frac{abR}{4\pi}$. Da mit (n,m) auch das Quadrat $[n-1,n] \times [m-1,m]$ in S liegt, haben wir gezeigt

$$N(R) \le \frac{abR}{4\pi}.$$

Hat man umgekehrt $(x,y) \in S$, so setzt man $n = \lceil x \rceil$ und $m = \lceil y \rceil$ und hat mit diesen Werten

$$\lambda_{n,m} \le \pi^2\left(\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2}\right) \le R + \pi^2\left(\frac{2x+1}{a^2} + \frac{2y+1}{b^2}\right)$$
$$\le R + \pi^2\left(\frac{2a\sqrt{R}/\pi + 1}{a^2} + \frac{2b\sqrt{R}/\pi + 1}{b^2}\right) = R + 2\pi\sqrt{R}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Weil jeder Punkt $(x, y) \in S$ in einem Quadrat $[n-1, n] \times [m-1, m]$ mit $\lambda_{n,m}$ wie oben liegt, haben wir gezeigt

$$\frac{abR}{4\pi} \leq N\left(R + 2\pi\sqrt{R}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\right).$$

Invertiert man diese Formel, so findet man $C_1, C_2 > 0$, abhängig von a und b, so dass

$$\frac{abR}{4\pi} - C_1\sqrt{R} - C_2 \leq N(R) \leq \frac{abR}{4\pi}.$$

4.6 Bemerkung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet oder ein Polygon. Nach Theorem 4.1 besitzt der Laplace-Operator mit Dirichlet Randbedingungen eine unendliche Folge $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ von Eigenwerten. Wir schreiben jeden Eigenwert so oft hin, wie die Dimension des zugehörigen Eigenraums angibt. Die Zählfunktion schreibt sich dann $N(R) = \#\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n \leq R\}, R > 0$. Für das Rechteck haben wir gesehen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \lim_{R\to\infty} \frac{R}{N(R)} = \frac{4\pi}{ab}.$$

5 Das Courantsche Minimum-Maximum Prinzip

5.1 Theorem (Minimum-Maximum Prinzip). *Sei* $B \in L(H)$ *ein selbstadjungierter, kompakter Operator mit nicht-negativen Eigenwerten* $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots$*, wobei jeder Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit aufgezählt wird. Für* $n \in \mathbb{N}$ *und* $v_1, \ldots, v_n \in H$ *setzen wir* $\{v_1, \ldots, v_n\}^\perp = \{x \in H \mid 1 \leq j \leq n : x \perp v_j\}$*. Dann*

$$\mu_n = \min\left\{ \max_{x \in \overline{B}_1(0) \cap \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}^\perp} \langle Bx, x\rangle \;\middle|\; v_1, \ldots, v_{n-1} \in H \right\}. \tag{5.1}$$

5.2 Lemma. *Sei* A *ein monotoner Operator im Hilbertraum* H*. Wenn zusätzlich die Einbettung* $H_E \hookrightarrow H$ *der energetischen Erweiterung* H_E *nach* H *kompakt ist, und* $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren ist, wobei* λ_n *der Eigenwert zu* u_n *ist, dann* $H_E = \{\sum_{j=1}^\infty x_j u_j \mid \sum_{j=1}^\infty \lambda_j |x_j|^2 < \infty\}$ *und*

$$\left\langle \sum_{j=1}^\infty x_j u_j, \sum_{k=1}^\infty y_k u_k \right\rangle_E = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j x_j \overline{y}_j.$$

5.3 Theorem. *Sei* A *ein monotoner Operator in einem unendlich-dimensionalen Hilbertraum* H*. Die Einbettung* $H_E \hookrightarrow H$ *der energetischen Erweiterung* H_E *nach* H *sei kompakt. Es seien* $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ *die Eigenwerte der Friedrichs-Erweiterung* A_F*, wobei jeder Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit aufgezählt wird. Dann*

$$\lambda_n = \max\left\{ \inf_{x \in \partial B_1(0) \cap \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}^\perp \cap H_E} \langle x, x\rangle_E \;\middle|\; v_1, \ldots, v_{n-1} \in H \right\}.$$

Dabei beziehen sich $B_1(0)$ *und* $\perp$ *auf das Skalarprodukt in* H*.*

5.4 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit C^∞-Rand oder ein Polygon.

Der Operator A im Hilbertraum $H = L^2(\Omega)$ sei gegeben durch $D(A) = \mathscr{D}(\Omega)$ und $Au = -\Delta u$. Seine Friedrichs-Erweiterung A_F bezeichnet man dann als *Laplace-Operator* auf Ω mit *Dirichlet-Randbedingungen.*

Für jedes $x \in \partial\Omega$, welches keine Ecke von Ω ist, sei $\nu(x)$ die äußere Einheitsnormale an Ω in x. Der Operator B in H sei gegeben durch $D(B) = \{u \in C^2(\Omega) \mid \forall x : \langle \nabla u(x), \nu(x)\rangle = 0\}$ und $Bu = -\Delta u$. Man bezeichnet dann $B_F(\mathrm{id} + B)_F - \mathrm{id}$ als Laplace-Operator auf Ω mit *Neumann-Randbedingungen.*

5.5 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit C^∞-Rand oder ein Polygon. Es seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators mit Dirichlet-Randbedingungen und $0 = \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators mit Neumann-Randbedingungen. Dann gilt $\nu_n \leq \lambda_n$ für jedes n.*

5.6 Satz. *Seien Ω_1 und Ω_2 zwei beschränkte Gebiete mit C^∞-Rand oder Polygone. Es gelte $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Ferner seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators auf Ω_1 und $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators auf Ω_2, beide Male mit Dirichlet-Randbedingungen. Dann gilt $\mu_n \leq \lambda_n$ für jedes n.*

6 Die Weylsche Formel für die asymptotische Verteilung der Eigenwerte

6.1 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet mit C^∞-Rand oder ein Polygon. Seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators auf Ω mit Dirichlet-Randbedingungen und seien $0 = \nu_1 \leq \nu_2 \leq \ldots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators auf Ω mit Neumann-Randbedingungen. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} N_{D,\Omega}(R) &= \#\{n \mid \lambda_n \leq R\}, \\ N_{N,\Omega}(R) &= \#\{n \mid \nu_n \leq R\}. \end{aligned}$$

6.2 Beispiel. Für $\Omega = \prod_{k=1}^N (0, a_k)$ gilt

$$\lim_{R\to\infty} \frac{N_{D,\Omega}(R)}{R^{N/2}} = \lim_{R\to\infty} \frac{N_{N,\Omega}(R)}{R^{N/2}} = \frac{\alpha_N}{(2\pi)^N} \prod_{k=1}^N a_k,$$

wobei α_N das Volumen der N-dimensionalen Kugel ist. Der zugehörige Eigenwert ist $\lambda_{n_1,\ldots,n_N} = \pi^{2N} \left(\sum_{j=1}^N \frac{n_j^2}{a_j}^2 \right)$.

Bemerkung. Auf Blatt 6 der Analysis III im Wintersemester 2012 wurde gezeigt

$$\alpha_N = \begin{cases} \frac{1}{k!}\pi^k, & N = 2k, \\ \frac{2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)}\pi^k, & N = 2k+1. \end{cases}$$

6.3 Lemma. *Seien* $Q_1, \ldots, Q_\ell$ *disjunkte, offene Quader im* $\mathbb{R}^N$ *und sei* Ω *das Innere von* $\bigcup_{k=1}^\ell \overline{Q}_k$. *Dann*

$$\frac{\alpha_N}{(2\pi)^N} \sum_{k=1}^{\ell} \operatorname{vol}(Q_k) \leq \lim_{R\to\infty} \frac{N_{D,\Omega}(R)}{R^{N/2}}. \tag{6.1}$$

6.4 Lemma. *Seien* $Q_1, \ldots, Q_\ell$ *disjunkte, offene Quader im* $\mathbb{R}^N$ *und sei* Ω *das Innere von* $\bigcup_{k=1}^\ell \overline{Q}_k$. *Dann*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{N_{N,\Omega}(R)}{R^{N/2}} \leq \frac{\alpha_N}{(2\pi)^N} \sum_{k=1}^{\ell} \operatorname{vol}(Q_k). \tag{6.2}$$

6.5 Lemma. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit C^∞-Rand oder ein Polygon. Dann gibt für jedes $\epsilon > 0$ Zahlen $\ell < m$ und offene Quader $Q_1, \ldots, Q_m \subset \mathbb{R}^N$ mit den folgenden Eigenschaften*

(a) $\bigcup_{j=1}^{\ell} \overline{Q}_j \subset \Omega$,

(b) $\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{m} \overline{Q}_j$,

(c) $\operatorname{vol}(\Omega) - \epsilon < \sum_{j=1}^{\ell} \operatorname{vol}(Q_j) \leq \operatorname{vol}(\Omega) \leq \sum_{j=1}^{m} \operatorname{vol}(Q_j) < \operatorname{vol}(\Omega) + \epsilon$.

6.6 Theorem (Weylsche Formel). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit C^∞-Rand oder ein Polygon. Dann*

$$\lim_{R \to \infty} \frac{N_{D,\Omega}(R)}{R^{N/2}} = \frac{\alpha_N}{(2\pi)^N} \operatorname{vol}(\Omega).$$

Bemerkung. Unter denselben Voraussetzungen kann man auch zeigen

$$\lim_{R \to \infty} \frac{N_{N,\Omega}(R)}{R^{N/2}} = \frac{\alpha_N}{(2\pi)^N} \operatorname{vol}(\Omega).$$

Details findet man in Abschnitt VI §4 von Courant und Hilbert [3].

7 Die Greensche Funktion für die Wärmeleitungsgleichung

7.1 Definition. Die Funktion

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

heißt *Fundamentallösung* für die Wärmeleitungsgleichung.

In der Einführung in die partiellen Differentialgleichungen wurde die folgende Formel für die Lösung des Cauchy-Problems im $\mathbb{R}^N$ gezeigt.

7.2 Theorem. *Für* $g \in C(\mathbb{R}^N)$ *beschränkt setze*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x-y,t) g(y) d\lambda_N(y).$$

Dann $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \times (0,\infty)$ *und* u *löst das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u &= g && \text{in } \mathbb{R}^N \times \{0\}. \end{aligned}$$

7.3 Definition. Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$. Eine Funktion $G\colon \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt *Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung* in Ω, wenn für jedes $g \in C(\overline{\Omega})$ mit $g|_{\partial\Omega} = 0$ die Funktion

$$u(x,t) = \int_\Omega G(x,y,t) g(y) d\lambda_N(y)$$

das folgende gemischte Anfangs- und Randwertwertproblem löst

$$u_t - \Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega \times (0,\infty), \tag{7.1}$$

$$u = g \qquad \text{in } \Omega \times \{0\}, \tag{7.2}$$

$$u = 0 \qquad \text{in } \partial\Omega \times (0,\infty). \tag{7.3}$$

Für den Rest des Kapitels sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein fest gewähltes, beschränktes Gebiet mit C^∞-Rand oder ein Polygon. Ferner seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators auf Ω mit Dirichlet-Randbedingungen, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine zugehörige Orthonormalbasis des $L^2(\Omega)$ aus Eigenvektoren. Da mit b_n auch $\overline{b}_n$ ein Eigenvektor zu λ_n ist, dürfen wir annehmen, dass alle b_n reell sind.

7.4 Lemma. $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_n}}b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist ein vollständiges Orthonormalsystem in* $H_0^1(\Omega)$ *und* $\left(\frac{1}{\sqrt{(1+\lambda_n)(1+\lambda_m)}}b_n(x)b_m(y)\right)_{n,m\in\mathbb{N}}$ *ist ein vollständiges Orthonormalsystem in* $H_0^1(\Omega\times\Omega)$.

Wir setzen

$$G(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} b_n(x) b_n(y). \tag{7.4}$$

Für festes $t > 0$ hat der n-te Summand die Norm $(1+\lambda_n)e^{-\lambda_n t}$ in $H_0^1(\Omega\times\Omega)$. Wegen der Weylschen Formel konvergiert die Reihe sowohl in $L^2(\Omega\times\Omega)$ als auch in $H_0^1(\Omega\times\Omega)$.

Ohne einen guten Regularitätssatz kommt man jetzt nicht weiter.

7.5 Bezeichnung. Sei Ω ein Gebiet und sei $f \in L^2(\Omega)$. Wir sagen, dass $u \in H_0^1(\Omega)$ eine *schwache Lösung* von $-\Delta u = f$ ist, wenn für jedes $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle = \int_\Omega f\,\overline{v}$$

gilt.

7.6 Bemerkung. Das ist dieselbe Definition wie in 15.2 der Einführung in die partiellen Differentialgleichungen im Winter 2013/14.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit C^∞-Rand oder ein Polygon. Sei $D(A) = \mathscr{D}(\Omega)$ und $Au = -\Delta u$ und sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann ist $u \in H_0^1(\Omega)$ genau dann schwache Lösung von $-\Delta u = f$, wenn $A_F u = f$.

7.7 Theorem. *Sei* Ω *ein Gebiet mit* C^∞*-Rand, sei* $k \in \mathbb{N}$ *und sei* $f \in H^{k-1}(\Omega)$*. Wenn* u *schwache Lösung von* $\Delta u = f$ *ist, dann* $u \in H^{k+1}(\Omega)$*. Ferner existiert* $C > 0$*, so dass für alle* $u \in H^{k+1}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ *gilt*

$$\|u\|_{H^{k+1}}^2 \le C\left(\|\Delta u\|_{H^{k-1}}^2 + \|u\|_{H^k}^2\right).$$

Das ist eine quantitative Version von Satz 4.2, die man als Theorem 5.1.3 in Taylor [13] findet.

7.8 Korollar. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ein beschränktes Gebiet mit* C^∞*-Rand. Zu jedem* $k \in \mathbb{N}$ *existiert* $C_k > 0$*, so dass*

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} \le C_k(1+\lambda)^{k/2}\|u\|_{L^2(\Omega)},$$

wenn u *ein Eigenvektor des Laplace-Operators mit Dirichlet-Randbedingungen auf* Ω *und* λ *der zugehörige Eigenwert ist.*

Beweis. Als Übung. $\square$

7.9 Korollar. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit C^∞-Rand. Zu $m \in \mathbb{N}_0$ sei $k = \lceil m + \frac{N+1}{2} \rceil$. Dann existiert $C > 0$ mit der folgenden Eigenschaft:*

Für jeden Eigenvektor u des Laplace-Operators mit Dirichlet-Rand-bedingungen auf Ω gelten

(a) $u \in C^m(\overline{\Omega})$,

(b) $\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} \leq C(1+\lambda)^{k/2}\|u\|_{L^2(\Omega)}$, *wobei λ der zugehörige Eigenwert ist.*

Wegen Korollar 7.9 konvergiert die Reihe $G(x,y,t) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda_n t} b_n(x) b_n(y)$ für jedes feste $t > 0$ sogar in $C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$.

7.10 Lemma. *Sei $g \in L^2(\Omega)$ und sei $t > 0$. Dann existiert für alle $x \in \overline{\Omega}$ das Integral $u(x,t) = \int_\Omega G(x,y,t) g(y) dy$ und stimmt mit $\sum_{n=1}^\infty e^{-\lambda_n t} \langle g, b_n \rangle_{L^2(\Omega)} b_n$ überein.*

Bemerkung. Im Beweis von Lemma 7.10 wurde gezeigt, dass für jedes $x \in \overline{\Omega}$ und jedes $t > 0$ die Funktion $G(x, \cdot, t)$ in $C^\infty(\overline{\Omega})$ liegt.

7.11 Lemma. *Die Funktion u aus Lemma 7.10 liegt in $C^\infty(\overline{\Omega})$.*

7.12 Theorem. *Für $g \in L^2(\Omega)$ setze*

$$u(x,t) = \int_\Omega G(x,y,t) g(y) dy.$$

Dann löst u das Anfangs- und Randwertwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \lim_{t \searrow 0} u(x,t) &= g(x) && \text{in } L^2(\Omega), \\ u &= 0 && \text{in } \partial\Omega \times (0,\infty). \end{aligned}$$

Ergänzung zu Kapitel 5

Beispiel. Einer Idee in Courant-Hilbert [3] folgend, gebe ich ein Beispiel von zwei Polygonen $\Omega_\epsilon \subset Q$ im $\mathbb{R}^2$ an, so dass der zweite Eigenwert des Laplace-Operators mit Neumann-Randbedingungen für Ω_ϵ echt kleiner als der entsprechende zweite Eigenwert für Q ist.

Setze dazu $Q = (-2,2) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $\Omega_\epsilon = (-2,-1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup [-1,1] \times (-\epsilon, \epsilon) \cup (1,2) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ für beliebig kleines $\epsilon > 0$. In beiden Fällen ist die konstante Funktion 1 ein Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert 0. Setze

$$v(x,y) = \begin{cases} -1, & -2 < x < -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Dann $v \in L^2(\Omega_\epsilon)$ mit $\|v\|^2 = 1 + 2\epsilon \int_{-1}^{1} x^2 dx + 1 = 2 + \frac{4}{3}\epsilon$. Außerdem besitzt v eine schwache erste Ableitung

$$\nabla v(x,y) = \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bezeichnen wir den zweiten Eigenwert des Laplace-Operators mit Neumann-Randbedingungen auf Ω_ϵ mit ν_2, so gilt nach Aufgabe 2 von Blatt 7

$$1 + \nu_2 = \inf \left\{ \int_\Omega \langle f, f \rangle_E \,\middle|\, f \in H_E, \|f\| = 1, f \perp 1 \right\}.$$

Für das v von oben gilt

$$\frac{\langle v, v \rangle_E}{\|v\|^2} = 1 + \frac{2\epsilon}{2 + \frac{4}{3}\epsilon} \to 1, \qquad \epsilon \to 0.$$

Also $\nu_2 < \epsilon$. Andererseits haben wir den zweitkleinsten Eigenwert des Laplace-Operators mit Neumann-Randbedingungen für Q bereits früher bestimmt, er ist gleich $\frac{\pi^2}{16}$.

Dieses Beispiel zeigt, dass das Analogon zu Satz 5.6 für Neumann-Randbedingungen nicht gilt.

8 Beweis des Regularitätssatzes

In diesem Abschnitt beweisen wir den Regularitätssatz 7.7.

8.1 Bezeichnung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Ein Differentialoperator erster Ordnung mit glatten Koeffizienten auf $\overline{\Omega}$ ist eine Abbildung $X\colon H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ der Form

$$Xu(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)u_{x_j}(x) + a_0(x)u(x),$$

wobei $a_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $j = 0, \ldots, N$. Wir verwenden hier die Schreibweise $\frac{\partial u}{\partial x_j} = u_{x_j}$. Dann ist X stetig und wir bezeichnen ihre Operatornorm mit $\|X\|$.

Zu gegebenem X definieren wir den Operator $L = -\Delta + X$ durch

$$\begin{aligned} &L\colon H_0^1(\Omega) \to H^1(\Omega)', \\ &L(u)(v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \overline{v} \rangle + \int_\Omega (Xu)v. \end{aligned}$$

8.2 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit C^∞-Rand oder ein Polygon und sei L wie in 8.1. Dann gibt es ein $C > 0$, so dass für jedes $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt*

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \le C\|Lu\|^2_{H^1(\Omega)'} + C\|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{8.1}$$

8.3 Bemerkung. (a) Sei R ein Ring. Für $a, b \in R$ bezeichnen wir mit $[a, b] = ab - ba$ den *Kommutator* von a und b.

(b) Sei L wie in Bezeichnung 8.1, sei $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ und sei $M_\varphi\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ gegeben durch $M_\varphi(u)(x) = u(x)\varphi(x)$. Dann schreibt man $[L, \varphi] = L \circ M_\varphi - M_\varphi \circ L$ und bezeichnet $[L, \varphi]$ als Kommutator.

8.4 Lemma. *Der Kommutator $[L, \varphi]$ ist ein Differentialoperator erster Ordnung mit glatten Koeffizienten.*

8.5 Bezeichnung. Wir fixieren ein Gebiet Ω im $\mathbb{R}^N$. Wir sagen, dass ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^N$ die Eigenschaft (R) für Ω hat, wenn für jeden Differentialoperator L wie in Bezeichnung 8.1, jedes $k \in \mathbb{N}$ und jede offene Menge $V \subset U$ mit $\overline{V} \subset U$ die folgenden beiden Aussagen gelten

(a) Wenn $f \in H^{k-1}(U \cap \Omega)$ und $u \in H_0^1(U \cap \Omega)$ ihren Träger in $V \cap \overline{\Omega}$ haben und u schwache Lösung von $Lu = f$ ist, dann $u \in H^{k+1}(U \cap \Omega)$.

(b) Es existiert $C > 0$, so dass für alle $u \in H^{k+1}(U \cap \Omega) \cap H_0^1(U \cap \Omega)$ mit Träger in $V \cap \overline{\Omega}$

$$\|u\|_{H^{k+1}}^2 \leq C \left(\|Lu\|_{H^{k-1}}^2 + \|u\|_{H^k}^2\right).$$

8.6 Lemma. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet. Wenn jeder Punkt $x \in \overline{\Omega}$ eine offene, zusammenhängende Umgebung U_x besitzt, so dass U_x die Eigenschaft (R) für Ω hat, dann gilt für jeden Differentialoperator L wie in Bezeichnung 8.1 und jedes $k \in \mathbb{N}$*

(a) Wenn $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von $Lu = f$ für ein $f \in H^{k-1}(\Omega)$ ist, dann $u \in H^{k+1}(\Omega)$.

(b) Es existiert $C > 0$, so dass für alle $u \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_{H^{k+1}}^2 \leq C \left(\|Lu\|_{H^{k-1}}^2 + \|u\|_{H^k}^2\right).$$

8.7 Bezeichnung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet, sei $U \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge, so dass entweder

(a) $U \subset \Omega$ oder

(b) $U \cap \Omega = \{x \in U \mid x_N < 0\}$.

Im ersten Fall setzen wir $J = \{1, \dots, N\}$, im zweiten $J = \{1, \dots, N-1\}$. Für $k \in \mathbb{N}$ und $u \in H^k(U \cap \Omega)$ derart, dass der Träger von u eine kompakte Teilmenge von U ist, $j \in J$ und $h \in \mathbb{R}$ mit hinreichend kleinem Betrag setzen wir

$$D_{j,h}u(x) = \frac{1}{h}(u(x + he_j) - u(x)).$$

8.8 Lemma. *Es gelten die Bezeichnungen aus 8.7*

(a) Es gebe $C > 0$ und eine reelle Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\|D_{j,h_n}u\|_{H^k} \leq C$ für alle n. Dann existiert die schwache partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ und es gilt $\left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{H^k} \leq C$.

(b) Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und jedes $u \in H^{k+1}(U \cap \Omega)$ mit kompaktem Träger in $U \cap \overline{\Omega}$ existiert $\epsilon > 0$, so dass für alle $j \in J$ und alle h mit $|h| < \epsilon$

$$\|D_{j,h}u\|_{H^k} \leq \|u\|_{H^{k+1}}.$$

8.9 Lemma. *Sei U wie in 8.7. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es $C > 0$, so dass*

$$\|[D_{j,h}, L]u\|_{H^k} \leq C\|u\|_{H^k}$$

für jedes $j \in J$, jedes $u \in H^k(U \cap \Omega)$, dessen Träger kompakt in $U \cap \overline{\Omega}$ ist, und alle h mit hinreichend kleinem Betrag.

8.10 Lemma. *Sei* U *wie in 8.7. Dann besitzt* U *die Eigenschaft (R) für* Ω.

Hier kommt man jetzt nicht weiter. Taylor gibt in seinem Buch keinen Hinweis, wie man von allgemeinem Rand zum Rand des Halbraums kommt. Renardy und Rogers beweisen den Satz für gleichmäßig elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung mit glatten Koeffizienten. Das sind Operatoren der Form

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \tag{8.2}$$

wobei die Matrix $(a_{i,j}(x))_{i,j}$ für jedes $x \in \overline{\Omega}$ symmetrisch ist, alle Eigenwerte dasselbe Vorzeichen haben und der betragsmäßig kleinste Eigenwert von 0 weg beschränkt ist.

Um zu sehen, wie man in diesem Fall schwache Lösungen definieren muss, sei $u \in C^2(\Omega)$ mit $Lu = f$ für ein $f \in C(\Omega)$ gegeben. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega L(u)\varphi \\
&= \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right) + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \varphi(x)b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \int_\Omega \varphi(x)c(x)u(x) \\
&\quad = -\sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \varphi(x)b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \int_\Omega \varphi(x)c(x)u(x).
\end{aligned}$$

8.11 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet, sei L wie in (8.2). Dann bezeichnet man $u \in H_0^1(\Omega)$ als *schwache Lösung* von $Lu = f$, wenn

$$\int_\Omega \left(-\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}u_{x_j}v_{x_i} + \sum_{i=1}^{N} b_i u_{x_i} v + c\,u\,v\right) = \int_\Omega fv$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

Dann zeigen Renardy und Rogers [12], Theorem 8.53,

8.12 Theorem. *Sei* L *wie in (8.2) gleichmäßig elliptisch und sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ein beschränktes Gebiet mit* C^2*-Rand. Wenn* $u \in H_0^1(\Omega)$ *schwache Lösung von* $Lu = f$ *für* $f \in L^2(\Omega)$ *ist, dann* $u \in H^2(\Omega)$ *und*

$$\|u\|_{H^2} \leq C\left(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{L^2}\right)$$

für von u *unabhängiges* C.

Der folgende Satz ist eine Variante des Theorems 13.12 aus der Einführung in die partiellen Differentialgleichungen, der bereits zu Anfang von § 2 hätte bewiesen werden müssen.

8.13 Satz. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ein beschränktes Gebiet mit* C^∞*-Rand oder ein Polytop. Sei* $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. *Dann* $u \in H_0^1(\Omega)$ *genau dann, wenn* $u|_{\partial\Omega} = 0$.

9 Die hyperbolische Metrik

Wir folgen dem Buch von Iwaniec [6] und dem Skript von Herrn Bogopolski.

9.1 Bezeichnung. (a) Mit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ bezeichnen wir die obere Halbebene.

(b) Ein *Automorphismus* der oberen Halbebene ist eine biholomorphe Abbildung $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$, d. h. eine holomorphe Bijektion, deren Inverse ebenfalls holomorph ist. Die Menge aller Automorphismen bildet die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$, wobei die Gruppenoperation die Komposition von Abbildungen ist.

(c) Eine *Möbius-Transformation* ist eine Abbildung der Form $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \neq 0$.

(d) Die *spezielle lineare Gruppe* über einem Körper k ist definiert als $\mathrm{SL}(2, k) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in k^{2\times 2} \,|\det(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = 1\right\}$.

(e) In der Funktionentheorie wird gezeigt, dass durch

$$\widetilde{\Phi}\colon \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to \operatorname{Aut}(\mathbb{H}), \quad \widetilde{\Phi}(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right))(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus gegeben wird, dessen Kern aus den beiden Matrizen $\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ besteht.

(f) Setzt man also $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, so wird durch

$$\Phi\colon \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \to \operatorname{Aut}(\mathbb{H}), \quad \Phi(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right))(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

ein Gruppenisomorphismus gegeben.

Erstaunlicherweise gibt es eine Metrik auf $\mathbb{H}$, bezüglich derer sämtliche Automorphismen isometrisch sind.

9.2 Lemma. *Durch*

$$\rho(z, w) = \log \frac{|z - \overline{w}| + |z - w|}{|z - \overline{w}| - |z - w|}, \qquad z, w \in \mathbb{H},$$

wird eine Metrik auf $\mathbb{H}$ *gegeben, die man als* hyperbolische Metrik *bezeichnet.*

9.3 Bemerkung. Setzt man

$$u(z,w) = \frac{|z-w|^2}{4 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w},$$

so gilt $\cosh \rho(z,w) = 1 + 2u(z,w)$.

9.4 Bemerkung. Für $g \in \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ von der Form $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, und $z \in \mathbb{H}$ gilt

$$\operatorname{Im} g(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}.$$

9.5 Satz. *Für* $g \in \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ *und* $z, w \in \mathbb{H}$ *gilt* $\rho(z,w) = \rho(g(z), g(w))$.

9.6 Bemerkung. Durch ρ wird $\mathbb{H}$ zu einer Riemannschen Fläche. Man kann zeigen, dass die Menge ihrer Geodätischen genau aus den euklidischen Halbkreisen mit reellem Mittelpunkt sowie den Senkrechten auf der reellen Achse besteht.

9.7 Bezeichnung. Zu der Metrik gehört auch ein Volumenelement. Durch

$$\mu(E) = \int_E \frac{d\lambda_2(x,y)}{y^2}$$

wird ein Borelmaß auf $\mathbb{H}$ gegeben. Das zugehörige Integral ist offenbar gegeben durch $\int_{\mathbb{H}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{H}} f(x,y) y^{-2} d\lambda_2(x,y)$.

9.8 Satz. *Für jedes* $g \in \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ *und jede Borelmenge* $E \subset \mathbb{H}$ *gilt* $\mu(E) = \mu(g(E))$.

9.9 Lemma. *Für jede offene Menge* $U \subset \mathbb{H}$ *ist* $\mathscr{D}(U)$ *ist dicht in* $L^2(U, \mu)$.

9.10 Lemma. *Wir definieren einen unbeschränkten Operator* A *in* $L^2(\mathbb{H}, \mu)$ *durch* $D(A) = \mathscr{D}(\mathbb{H})$ *und*

$$Au = -y^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Dann ist $\mathrm{id} + A$ *monoton (im Sinne des Satzes über die Friedrichs-Erweiterung.)*

9.11 Definition. Wenn B_F die Friedrichs-Erweiterung von $\mathrm{id} + A$ ist, dann bezeichnen wir $B_F - \mathrm{id}$ als *Laplace-Operator* auf $\mathbb{H}$. Es handelt sich um den Laplace-Beltrami-Operator der Riemannschen Fläche $\mathbb{H}$.

10 Fuchssche Gruppen

10.1 Bemerkung. (a) Sei $\Gamma \leq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ eine Untergruppe. Dann operiert Γ via $\gamma z = \Phi(\gamma)(z)$ auf $\mathbb{H}$, wobei Φ wie in Bezeichnung 9.1 definiert ist.

(b) Die Menge $\Gamma z = \{\gamma z \mid \gamma \in \Gamma\}$ ist der *Orbit* von z unter der Gruppenoperation. Zwei Elemente heißen *äquivalent*, wenn sie im selben Orbit liegen.

(c) Γ operiert *diskontinuierlich* auf $\mathbb{H}$, wenn kein Orbit einen Häufungspunkt in $\mathbb{H}$ besitzt.

(d) Eine Untergruppe $\Gamma \leq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, welche diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$ operiert, ist eine *Fuchssche Gruppe.*

(e) Eine Fuchssche Gruppe ist von *erster Art*, wenn jeder Punkt in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Häufungspunkt eines Orbits Γz in der Topologie der Riemannschen Zahlensphäre ist.

10.2 Theorem. *(Poincaré, siehe [6], 2.1.) Eine Untergruppe $\Gamma \leq \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ist genau dann diskret in der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, wenn sie als Untergruppe der $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$ operiert.*

10.3 Beispiel. Die Modulgruppe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ ist eine Fuchssche Gruppe erster Art.

10.4 Definition. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{H}$ heißt *Fundamentalgebiet* einer Gruppe $\Gamma \leq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, wenn

(a) je zwei verschiedene Punkte aus F inäquivalent unter Γ sind und

(b) jeder Orbit mindestens einen Punkt in $\overline{F}$ enthält.

10.5 Satz. *Jede Fuchssche Gruppe erster Art hat ein Fundamentalgebiet F. Alle Fundamentalgebiete haben dasselbe endliche Volumen bezüglich des Maßes μ aus Bezeichnung 9.7.*

Das Fundamentalgebiet kann als hyperbolisches Polygon gewählt werden, d. h. man kann es so einrichten, dass seine Seiten Stücke von Halbkreisen mit Mittelpunkt auf der reellen Achse oder von Senkrechten auf der reellen Achse sind.

Beweis. § 2.2 von Iwaniec [6]. □

10.6 Beispiel. Ein Fundamentalgebiet der Modulgruppe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ wird gegeben durch $F = \{z \in \mathbb{H} \mid |\mathrm{Re}\, z| < \frac{1}{2}, |\mathrm{Im}\, z| > 1\}$ (siehe Abbildung 10.1). Jeder Randpunkt mit Ausnahme von i ist zu genau einem anderen Randpunkt äquivalent. Für $z \in \partial F$ mit $\mathrm{Re}\, z = -\frac{1}{2}$ ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z \in \partial F$, und für $z \in \partial F$ mit $|z| = 1$ ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) z \in \partial F$.

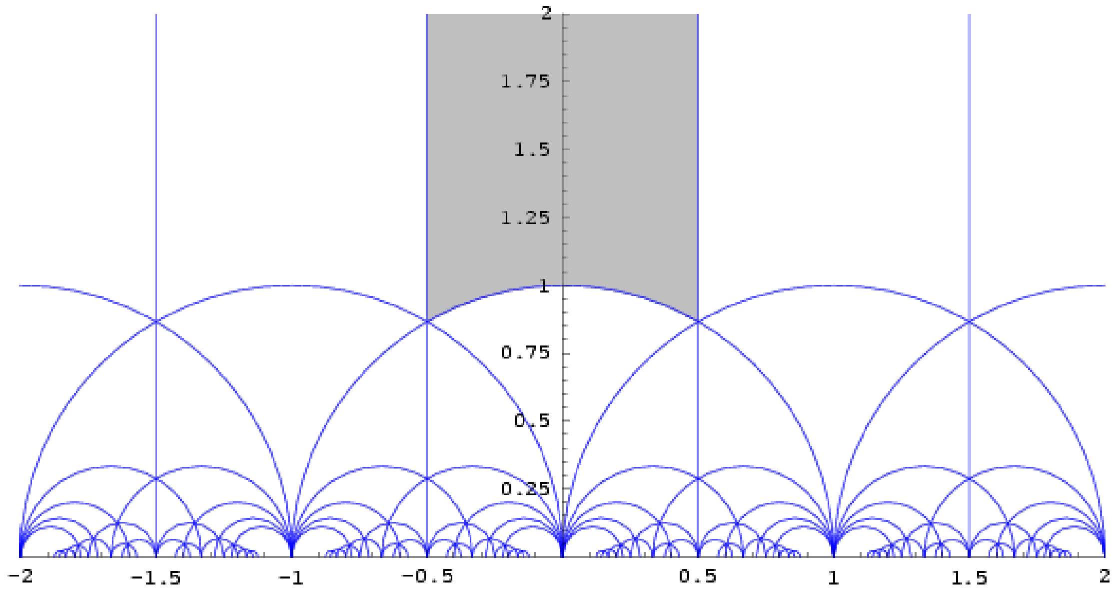

Abbildung 10.1: Fundamentalgebiet der Modulgruppe (aus dem Wikipedia-Artikel zu ModularGroup (englisch))

10.7 Bemerkung. (a) Ein Fundamentalgebiet, welches ein Polygon ist, bezeichnen wir als *Fundamentalpolygon*.

(b) Der Rand eines Polygons ist eine Nullmenge. Wenn also F ein Fundamentalpolygon einer Fuchsschen Gruppe Γ erster Art ist, dann ist $\mathbb{H} \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma F$ eine Nullmenge.

10.8 Definition. Eine Fuchssche Gruppe erster Art heißt *cokompakt*, wenn für jedes Fundamentalpolygon der hyperbolischer Abschluss kompakt in der hyperbolischen Metrik ist.

10.9 Bemerkung. (a) Wegen Aufgabe 1 von Blatt 11 kann eine Menge, die euklidisch unbeschränkt ist oder deren euklidischer Abschluss einen Punkt in $\mathbb{R}$ besitzt, nicht kompakt in der hyperbolischen Metrik sein.

(b) Sei $\Gamma \leq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ eine Gruppe und sei $\sigma \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Dann ist $B = \{\sigma\gamma\sigma^{-1} \mid \gamma \in \Gamma\}$ eine zu Γ isomorphe Untergruppe der $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, die genau dann eine Fuchssche Gruppe erster Art ist, wenn Γ eine ist. Wenn F ein Fundamentalpolygon von Γ ist, dann ist σF ein Fundamentalpolygon für B.

(c) Sei Γ eine nicht cokompakte Fuchssche Gruppe erster Art. Dann gibt es eine zu Γ isomorphe Fuchssche Gruppe B erster Art mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in B$, welche ein euklidisch unbeschränktes Fundamentalgebiet besitzt.

11 Automorphe Funktionen

11.1 Definition. Eine Funktion $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *automorph* bzgl. Γ, wenn $f(\gamma z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$ und alle $\gamma \in \Gamma$. Der Raum $C^\infty(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ besteht aus allen automorphen Funktionen von der Klasse C^∞.

11.2 Bezeichnung. Sei F ein Fundamentalpolygon von Γ. Für eine messbare, automorphe Funktion f setzen wir $\|f\|_2 = \sqrt{\int_F |f|^2 d\mu}$. Wegen der Invarianz des Maßes unter der Gruppenoperation hängt $\|f\|_2$ nicht von der Wahl von F ab. Wir setzen

$$L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \{f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C} \text{ automorph} \mid \|f\|_2 < \infty\}.$$

11.3 Satz. *Durch* $\langle f, g\rangle = \int_F f\overline{g}\, d\mu$ *wird* $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ *zu einem Hilbertraum. Der Raum* $C^\infty(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ *ist dicht in* $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$.

11.4 Satz. *Sei* Γ *eine Fuchssche Gruppe erster Art. Der durch* $D(A) = C^\infty(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ *und* $Au = u - y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ *gegebene Operator ist monoton.*

11.5 Definition. Der automorphe Laplace-Operator ist definiert als $\Delta = A_F - \mathrm{id}$, wobei A_F die Friedrichserweiterung des Operators aus Satz 11.4 ist.

11.6 Satz. *Sei* Γ *eine Fuchssche Gruppe erster Art mit kompaktem Fundamentalgebiet. Dann ist die Einbettung* $H_E \hookrightarrow L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mu)$ *kompakt. Insbesondere gelten die Aussagen von Theorem 2.3.*

11.7 Beispiel. (a) In Aufgabe 3 von Blatt 12 wurde gezeigt:

Sei $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Wir setzen $M = \{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists a, b \in \mathbb{Z} : ad - bc = 1\}$, wählen zu jedem Paar $(c,d) \in M$ ein Paar (a,b) mit $ad - bc = 1$ und setzen $\gamma_{(c,d)} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Dann konvergiert für jedes $\varphi \in C^\infty(0,\infty)$ mit $\varphi|_{(0,1]} = 0$ die Reihe

$$f(z) = \sum_{(c,d)\in M} \varphi(\mathrm{Im}(\gamma_{(c,d)} z)) \tag{11.1}$$

gegen eine automorphe Funktion in $C^\infty(\Gamma\backslash\mathbb{H})$.

(b) Für eine beliebige Fuchssche Gruppe Γ erster Art kann man zeigen, dass $(\mathrm{id} + \Delta)^{-1}$ genau dann kompakt ist, wenn Γ cokompakt ist.

12 Eisenstein-Reihen

12.1 Definition. Ein Fundamentalgebiet F einer Fuchsschen Gruppe Γ heißt *lokal endlich*, wenn es zu jeder kompakten Teilmenge K von $\mathbb{H}$ nur endlich viele $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(F) \cap K \neq \emptyset$ gibt.

12.2 Satz. *Jede Fuchssche Gruppe erster Art hat ein lokal endliches Fundamentalpolygon.*

Beweis. Nach Beardon [2], Theorem 9.4.2, ist das Dirichlet-Polygon ein konvexes Fundamentalpolygon im Sinn von [2], 9.3.1. Insbesondere ist es lokal endlich. $\square$

Wir betrachten im folgenden eine Fuchssche Gruppe Γ erster Art, die ein lokal endliches Fundamentalpolygon F mit $\infty \in \partial F$ besitzt und welche die Translation $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ enthält. Durch Konjugation der Gruppe können wir erreichen, dass

$$1 = \min\left\{ b > 0 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \right\}$$

Dann ist $\Gamma_\infty = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) | n \in \mathbb{Z}\}$ der *Stabilisator* von ∞. Der Stabilisator ist die von τ erzeugte Untergruppe von Γ. Mit $\Gamma_\infty \backslash \Gamma = \{\Gamma_\infty \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ bezeichnen wir die Menge seiner Rechtsnebenklassen.

12.3 Definition. Sei $\varphi\colon (0, \infty) \to \mathbb{C}$ messbar. Die formale Reihe

$$\mathcal{E}_\infty(z, \varphi) = \sum_{[\gamma] \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \varphi(\operatorname{Im}(\gamma z)) \tag{12.1}$$

bezeichnet man als gewichtete Eisenstein-Reihe (hierbei ist φ das Gewicht).

12.4 Bezeichnung. Für $1 \leq p < \infty$ besteht $L^p(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ besteht aus allen automorphen Funktionen, für welche $\|f\|_p = \left(\int_F |f(z)|^p \, d\mu\right)^{1/p}$ endlich ist.

12.5 Satz. *(a) $\varphi(\operatorname{Im}(\gamma z))$ hängt nicht vom Repräsentaten γ der Nebenklasse ab.*

(b) Wenn $\int_0^\infty \frac{|\varphi(y)|}{y^2} dy < \infty$, dann konvergiert die Reihe (12.1) absolut in $L^1(\Gamma \backslash \mathbb{H}, \mu)$. Speziell ist dann $\mathcal{E}_\infty(z, \varphi)$ automorph.

(c) Es gibt $R > 0$, so dass $\mathcal{E}_\infty(z, \varphi) = \varphi(\operatorname{Im} z)$ für alle $z \in F$, falls $\operatorname{Supp} \varphi \subset [R, \infty)$.

(d) *Wenn* $\int_0^\delta \frac{|\varphi(y)|}{y^2}\,dy < \infty$ *für ein* $\delta > 0$*, dann konvergiert die Reihe (12.1) gegen eine automorphe Funktion. Es gilt ferner* $\int_K |\mathcal{E}_\infty(z,\varphi)|^p\,d\mu < \infty$ *für alle Kompakta* $K \subset \mathbb{H}$.

12.6 Beispiel. In Aufgabe 3 von Blatt 12 wurde eine gewichtete Eisenstein-Reihe für die Modulgruppe konstruiert.

12.7 Satz. *Sei* Γ *eine Fuchssche Gruppe erster Art, die nicht cokompakt ist. Dann* $[\frac{1}{4},\infty) \subset \sigma(\Delta)$.

12.8 Definition. Für $N \in \mathbb{N}$ ist die *Hauptkongruenzuntergruppe* der Ordnung N definiert als

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \,\middle|\, a \equiv 1,\ b \equiv 0,\ c \equiv 0,\ d \equiv 1 \pmod N \right\}.$$

12.9 Vermutung (Selbergsche Spektrallückenvermutung). *Wenn* Δ *der automorphe Laplace-Operator zu* $\Gamma(N)$ *ist, dann* $\sigma(\Delta) \cap (0,\frac{1}{4}) = \emptyset$.

13 Fourier-Entwicklung automorpher Funktionen

13.1 Definition. Sei $\nu \in \mathbb{C}$. Die *modifizierte Besselsche Funktion zweiter Art* von der Ordnung ν (auch *Macdonaldsche Funktion* genannt), ist definiert als

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty e^{-x\cosh(t)} \cosh(\nu t) dt.$$

13.2 Bemerkung. K_ν löst die modifizierte Besselsche Differentialgleichung

$$w'' + \frac{1}{x} w' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) w = 0.$$

Unter allen Lösungen dieser Differentialgleichung ist sie bestimmt durch die Asymptotik

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad x \to \infty.$$

Jede davon linear unabhängige Lösung wächst exponentiell für $x \to \infty$.

13.3 Satz. *Sei Γ eine nicht cokompakte Fuchssche Gruppe erster Art mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$. Es sei $f \in C^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ derart, dass $-y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \lambda f$ für ein $\lambda \neq \frac{1}{4}$ und dass $\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x+iR)|$ höchstens polynomiell wächst. Es sei $s = \frac{1}{2} + i\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}$. Dann existieren eine Folge $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ und β_0 in $\mathbb{C}$, so dass*

$$f(x+iy) = \alpha_0 y^s + \beta_0 y^{1-s} + \sqrt{y} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} \alpha_m K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)\, e^{2\pi i m x}.$$

Bemerkung. Im Fall $\lambda = \frac{1}{4}$ muss y^{1-s} durch $\sqrt{y}\ln y$ ersetzt werden.

13.4 Satz (Jørgensensche Ungleichung, siehe Elstrodt, Grunewald und Mennicke [4], Theorem 2.4.1). *Wenn $A, B \in SL(2,\mathbb{R})$ eine diskrete Untergruppe erzeugen, dann gilt*

$$\left|\operatorname{tr}(A)^2 - 4\right| + \left|\operatorname{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2\right| \geq 1,$$

außer wenn eine der beiden folgenden Aussagen gelten

(a) $\operatorname{tr}(A) = 2$ *und* B *lässt den einzigen Fixpunkt von* A *fest,*

(b) $BAB^{-1} \in \{A, A^{-1}\}$.

13.5 Beispiel. (a) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und sei $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist ∞ der einzige Fixpunkt von A, und B lässt ihn genau dann fest, wenn $c = 0$. Ferner gilt

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - ac & a^2 \\ -c^2 & 1 + ac \end{pmatrix}$$

Im Fall $c \neq 0$ liegt also keine der Ausnahmen vor. Ferner

$$ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + ac + c^2 & 1 - a^2 - ac \\ c^2 & 1 - ac \end{pmatrix}.$$

Die Spur dieser Matrix ist $2 - c^2$. Daher ergibt die Jørgensensche Ungleichung, dass $|c| \geq 1$.

(b) Was für Matrizen mit $c = 0$ liegen in Γ?

Im Fall $c = 0$ gilt $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ Dann

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

woraus $a^2 \in \mathbb{N}$ folgt. Andererseits

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

woraus $\frac{1}{a^2} \in \mathbb{N}$ folgt. Insgesamt bleibt nur $a = \pm 1$.

(c) Die beiden Teile dieser Überlegung zeigen, dass entweder $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty$ oder $|c| \geq 1$.

Wir wiederholen eine Definition aus der Einführung in die partiellen Differentialgleichungen.

13.6 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $k \in \mathbb{N}_0$ und sei $1 \leq p < \infty$. Der *Sobolewraum* $W^{k,p}(U)$ besteht aus allen $u \in L^p(U)$, deren distributionelle Ableitungen $D^\alpha u$ mit $|\alpha| \leq k$ in $L^p(U)$ liegen.

13.7 Theorem (Verallgemeinertes Sobolewlemma. Evans [5], Theorem 5.6.6). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt mit C^1-Rand und sei $1 \leq p < \infty$. Falls $k > \frac{N}{p}$, so besitzt jedes $u \in W^{k,p}(\Omega)$ einen Repräsentanten in $C^{k - \lfloor \frac{N}{p} \rfloor - 1}(\Omega)$. Die Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k - \lfloor \frac{N}{p} \rfloor - 1}(\Omega)$ ist stetig.*

13.8 Satz. *Für* $\operatorname{Re} s > 1$ *konvergiert die Reihe* $\mathcal{E}_\infty(\cdot, y^s)$ *gegen eine Funktion von der Klasse* C^∞*. Diese Funktion erfüllt*

$$-y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathcal{E}_\infty(\cdot, y^s) = s(1-s) E_\infty(\cdot, y^s).$$

13.9 Bemerkung. Wenn man Satz 13.3 anwendet, erhält man für s mit $\operatorname{Re} s > 1$

$$\mathcal{E}_\infty(x+iy, y^s) = y^s + \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \varphi(s) y^{1-s} + \sum_{m \neq 0} \varphi_m(s) \sqrt{y} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi |m| y) e^{2\pi i m x}. \quad (13.1)$$

Im Fall der Modulgruppe $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ kann man die φ_m bestimmen. Beispielsweise hat man

$$\varphi(s) = \frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)},$$

wobei ζ die Riemannsche ζ-Funktion ist. Findet man in Kubota [10] (4.4.1).

13.10 Theorem (Selberg). *Die* φ_m *aus (13.1) lassen sich meromorph nach* $\mathbb{C}$ *fortsetzen.*

Es gibt sogar ein Analogon zur Weylschen Formel, welches von Selberg stammt.

13.11 Theorem (Weyl-Selberg-Formel, Venkov [15] (7.8)). *Wenn* $N(R)$ *die Zählfunktion für die Eigenwerte von* Δ *ist, dann*

$$\lim_{R \to \infty} \frac{N(R)}{R} - \frac{1}{4\pi R} \int_{-T}^{T} \frac{\varphi'(\frac{1}{2} + ir)}{\varphi(\frac{1}{2} + ir)} dr = \frac{\mu(f)}{4\pi},$$

wobei $R = \frac{1}{4} + T^2$.

Literaturverzeichnis

[1] A. Baker, *Transcendental number theory*, Cambridge University Press, London-New York, 1975.

[2] A. F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, vol. 91 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1995. Corrected reprint of the 1983 original.

[3] R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik I.* Heidelberger Taschenbücher. 30. 3. Aufl. Berlin-Heidelberg-New-York: Springer-Verlag XV, 469 S. mit 26 Abb. (1968)., 1968.

[4] J. Elstrodt, F. Grunewald, and J. Mennicke, *Groups acting on hyperbolic space*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998. Harmonic analysis and number theory.

[5] L. C. Evans, *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2010.

[6] H. Iwaniec, *Spectral methods of automorphic forms*, vol. 53 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI; Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, second ed., 2002.

[7] F. John, *Partial differential equations*, vol. 1 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, fourth ed., 1982.

[8] W. Kaballo, *Grundkurs Funktionalanalysis.*, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2011.

[9] ——, *Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie. Distributionen, lokalkonvexe Methoden, Spektraltheorie.*, Berlin: Springer Spektrum, 2014.

[10] T. Kubota, *Elementary theory of Eisenstein series*, Kodansha, Tokyo, 1973.

[11] F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, AKP Classics, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1997. Reprint of the 1974 original [Academic Press, New York; MR0435697 (55 #8655)].

[12] M. Renardy and R. C. Rogers, *An introduction to partial differential equations*, vol. 13 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993.

[13] M. E. Taylor, *Partial differential equations. I*, vol. 115 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1996. Basic theory.

[14] H. Triebel, *Höhere Analysis.* Hochschulbücher für Mathematik. Bd. 76. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 704 S. m. 42 Abb. M 60.00 (1972)., 1972.

[15] A. B. Venkov, *Spectral theory of automorphic functions and its applications*, vol. 51 of Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990. Translated from the Russian by N. B. Lebedinskaya.

[16] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, England; The Macmillan Company, New York, 1944.