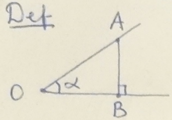
Vorlesung 1 Trigonometrie

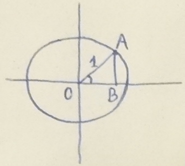
Definitionen von cos, sin, tan, Eigenschaften, Beispiele

Def



Sei $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. $\cos(\alpha) = \frac{|OB|}{|OA|}$, $\sin(\alpha) = \frac{|AB|}{|OA|}$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{|AB|}{|OB|}$.
$(\alpha \neq 0)$



Wir nehmen $|OA| = 1$. Dann ist $\boxed{\begin{array}{l} \cos(\alpha) = x\text{-Koord. von } A \\ \sin(\alpha) = y\text{-Koord. von } A \end{array}}$

Diese Definition erweitern wir auf alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften

1) $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, $|\cos\alpha| \leq 1$, $|\sin\alpha| \leq 1$.

2) $\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$

3) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

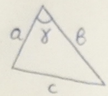
4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

5) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

Bsp $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

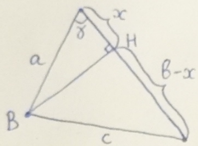
$\sin(0) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Satz 1 (Kosinussatz)



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Beweis



$$\cos\gamma = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cdot \cos\gamma$$

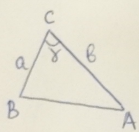
$$c^2 - (b-x)^2 = |BH|^2 = a^2 - x^2$$

$$c^2 - (b^2 - 2bx + x^2) = a^2 - x^2$$

$$c^2 = (b^2 - 2bx + x^2) + a^2 - x^2 = a^2 + b^2 - 2bx$$

$$= a^2 + b^2 - 2ba \cdot \cos\gamma$$

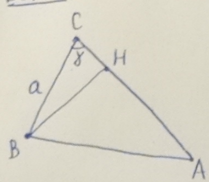
Satz 2 (Flächeninhalt-Satz)



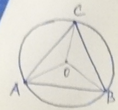
$$S_{ABC} = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2}$$

Beweis

$$S_{ABC} = \frac{|BH| \cdot |CA|}{2} = \frac{b(a \cdot \sin\gamma)}{2}$$

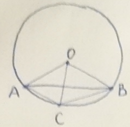


Satz 3 Peripherie- (Zentriwinkelsatz). Sei AB eine Sehne eines Kreises.



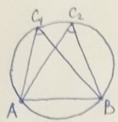
Sei O das Zentrum dieses Kreises und sei C ein Punkt auf dem Kreis. Dann gilt:

1) Wenn O und C ~~von~~ auf einer Seite von AB liegen, dann ist $\widehat{AOB} = 2\cdot\widehat{ACB}$



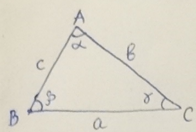
2) Wenn O und C ~~von~~ auf verschiedenen Seiten von AB liegen, dann ist $\widehat{AOB} = 360 - 2\widehat{ACB}$.

Folgerung 4 Sei AB eine Sehne eines Kreises. Wenn C_1 und C_2 zwei Punkte auf dem Kreis sind, die von einer Seite von AB liegen, dann gilt $A\widehat{C_1}B = A\widehat{C_2}B$

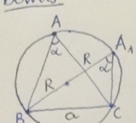


Satz 5 (Sinussatz) Sei R der Radius des Umkreises um ABC. Dann gilt

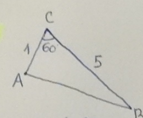
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



Beweis



Aufgabe



Berechne $|AB|$, S_{ABC}, R

$|AB|^2 = 1^2+5^2-2\cdot1\cdot5\cos60^\circ = 21$

$S_{ABC} = \frac{1\cdot5\cdot\sin60}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

$R = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \sqrt{7}$