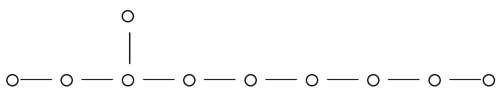
Nachklausur Coxetergruppen II, SoSe 14 (13.09.14)

(Prof. O. Bogopolski)

Aufgabe 1.

1) Formulieren Sie ein Kriterium für eine irreduzible hyperbolische Coxeter-Gruppe. [2 P.]

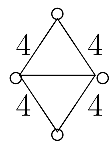
2) Es ist bekannt, dass die Gruppe E_{10} mit dem assoziierten Coxeter-Graphen wie unten eine hyperbolische Coxeter-Gruppe ist.



Stimmt das, dass jede unendliche irreduzible parabolische Untergruppe von E_{10} auch eine hyperbolische Coxeter-Gruppe ist? [4 P.]

3) Geben Sie eine Definition einer affinen Weyl-Gruppe (= affinen Coxeter-Gruppe). [2 P.]

4) Sei G die Coxeter-Gruppe mit dem Coxeter-Graph



Beweisen Sie, dass die parabolischen Untergruppen H_1 und H_2, die dem oberen und dem unteren Dreieck des Coxter-Graphs entsprechen, nicht konjugiert in G sind. [5 P.]

Hinweis. Benutzen Sie Faktorgruppen.

Lösungen.

1) Ein irreduzibles Coxeter-Paar (W, S) ist hyperbolisch genau dann, wenn folgendes gilt:

   1) Die assoziierte Bilinearform B ist nicht singular und nicht positiv definit.
   2) Für jedes $s \in S$ gilt $B_{S\setminus\{s\}} \not\succcurlyeq 0$,
      wobei $B_{S\setminus\{s\}}$ die mit $(W_{S\setminus\{s\}}, S \setminus \{s\})$ assoziierte Bilinearform ist.

2) Sei E_9 die parabolische Untergruppe von E_{10}, die durch streichen des "rechten" Erzeugers entsteht. Da sich E_9 nicht in der Liste der endlichen Coxeter-Gruppen befindet, ist E_9 unendlich. Da das Kriterium für E_{10} erfüllt ist, ist es für E_9 nicht erfüllt. Also ist E_9 nicht hyperbolisch.

3) Sei W eine endliche Weyl-Gruppe (= eine endliche Coxeter-Gruppe) und sei Φ ihr Wurzelsystem in V. Wenn das mit Φ assoziierte $\mathbb{Z}$-Modul L ein Gitter ist, dann heißt die Gruppe

$$W_a = \langle s_{\alpha,k} \,|\, \alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}\rangle$$

affine Weyl-Gruppe für W.

4) Wir markieren die Eckpunkte des Coxeter-Graphs mit s_1, s_2, s_3, s_4 gegen den Uhrzeigersinn: Dann gilt

$$\begin{aligned} G = \langle s_1, s_2, s_3, s_4 \,|\quad & s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = s_4^2 = 1, \\ & (s_1s_2)^4 = (s_2s_3)^4 = (s_3s_4)^4 = (s_4s_1)^4 = 1, \\ & (s_2s_4)^3 = 1, (s_1s_3)^2 = 1\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \langle s_1, s_2, s_4\rangle, \\ H_2 &= \langle s_2, s_3, s_4\rangle. \end{aligned}$$

Wir faktorisieren G durch den Normalabschluss von H_1:

$$G/\langle\langle H_1\rangle\rangle = \langle s_3 \,|\, s_3^2 = 1\rangle.$$

Wäre H_2 zu H_1 konjugiert, dann würde H_2 in dem Normalabschluss von H_1 liegen. Dann wäre $G/\langle\langle H_1\rangle\rangle = 1$. Also sind H_1 und H_2 nicht konjugiert.

Aufgabe 2. Seien W und W' zwei endliche Weyl-Gruppen. Wir wissen, dass die entsprechenden affinen Coxeter-Gruppen die Form $W_a = \mathbb{Z}^n \rtimes W$ und $W'_a = \mathbb{Z}^{n'} \rtimes W'$ für einige $n, n' \in \mathbb{N}$ haben. Angenommen $W_a \cong W'_a$. Beweisen Sie:

1) $W \cong W'$. [5 P.]
2) $n = n'$. [10 P.]

Lösung. Nehmen wir an $G = \mathbb{Z}^n \rtimes W = \mathbb{Z}^{n'} \rtimes W'$.

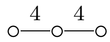
1) Wir betrachten den kanonischen Epimorphismus $\phi : G \to W$ mit $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathbb{Z}^n$.

Es gilt $W' \cap \mathrm{Ker}(\phi) = 1$, weil alle Elemente von W' endliche Ordnungen haben und alle nichttrivialen Elemente von $\mathbb{Z}^n$ unendliche Ordnungen haben.

Deswegen ist $\phi_{|W'}$ eine Einbettung von W' in W. Nach Symmetrie existiert eine Einbettung von W in W'. Da W und W' endlich sind, sind diese Gruppen isomorph.

2) Die Untergruppen $A = \mathbb{Z}^n$ und $B = \mathbb{Z}^{n'}$ haben endliche Indizes in G. Deswegen hat $A \cap B$ einen endlichen Index in A und in B. Es ist leicht zu beweisen, dass die $\mathbb{Z}$-Dimension erhalten ist beim Übergehen zu Untergruppen von endlichem Index. Daraus folgt: $n = n'$.

Aufgabe 3. Sei $G := \langle x, y, z \,|\, x^2 = y^2 = z^2 = 1, (xy)^4 = (yz)^4 = (xz)^2 = 1\rangle$. Wir betrachten die Untergruppe $H := \langle a, b\rangle$ von G, wobei $a = zyxy$ und $b = yzyx$ ist.



1) Beweisen Sie:
   a) H ist abelsch; [5 P.]
   b) $H \lhd G$; [5 P.]
   c) $G/H \cong D_4$. [5 P.]
2) Mit der zusätzlichen Information, dass $H \cong \mathbb{Z}^2$ ist, beweisen Sie, dass $G \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes D_4$ ist. [5 P.]

(Das stimmt mit dem Fakt überein, dass G eine affine Coxeter-Gruppe ist. Diese Gruppe wird mit $\widetilde{\mathbf{B}}_2$ bezeichnet.)

Lösungen. 1)
a) Wir beweisen, dass $ab = ba$ gilt:

$$ab = zyxy \cdot yzyx = zyxzyx = zyzxyx.$$

$$ba = yzyx \cdot zyxy = yzyzxyxy = yzyzyxyx = zyzyyxyx = zyzxyx.$$

b) Die Elemente a und b sind konjugiert: $b = y^{-1}ay$. Deswegen genügt es zu zeigen, dass xax, yay und zaz in H liegen:

$$\begin{aligned}
xax &= xzyxyx &&= zxyxyx &&= zyxy &&= a,\\
yay &= yzyxyy &&= yzyx &&&&= b,\\
zaz &= zzyxyz &&= yxyz = &&a^{-1}.
\end{aligned}$$

c)

$$G/H = \langle x, y, z \,|\, x^2 = y^2 = z^2 = 1, (xy)^4 = (yz)^4 = (xz)^2 = 1, zyxy = 1, yzyx = 1\rangle$$

Da b zu a konjugiert ist, können wir die letzte Relation weglassen

$$G/H = \langle x, y, z \,|\, x^2 = y^2 = z^2 = 1, (xy)^4 = (yz)^4 = (xz)^2 = 1, zyxy = 1\rangle$$

Jetzt ersetzen wir z durch yxy:

$$\begin{aligned}
G/H &= \langle x, y, yxy \,|\, x^2 = y^2 = (yxy)^2 = 1, (xy)^4 = (yyxy)^4 = (xyxy)^2 = 1\rangle\\
&= \langle x, y \,|\, x^2 = y^2 = 1, (xy)^4 = 1\rangle\\
&\cong D_4.
\end{aligned}$$

2) G besitzt die parabolische Untergruppe

$$A = \langle x, y \,|\, x^2 = y^2 = 1, (xy)^4 = 1\rangle,$$

die nach der Faktorisierung durch H überlebt. Deswegen gilt $H \cap A = 1$. Außerdem gilt $H \lhd G$ und $G = \langle H, A\rangle$. Daraus folgt $G \cong H \rtimes A \cong \mathbb{Z}^2 \rtimes D_4$.

Aufgabe 4. Sei $W = \langle S \,|\, (ss')^{m(s,s')} = 1 \ (s, s' \in S)\rangle$ eine Coxeter-Gruppe. Für ein $w \in W$ bezeichnen wir mit $l(w)$ die Länge von w bezüglich S.

a) Formulieren Sie ein Kriterium für $l(ws) > l(w)$, wobei $s \in S$ ist. [2 P.]

b) Mit Hilfe dieses Kriteriums finden Sie ein Element der Länge 4 in der Coxeter-Gruppe

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}) = \langle s_1, s_2, s_3 \,|\, s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1, (s_1s_3)^2 = 1, (s_1s_2)^3 = 1\rangle.$$ [10 P.]

Lösung.

a) $\boxed{\textit{Lemma 5.4.4. Für je } w \in W \text{ und } s \in S \text{ gilt } l(ws) > l(w) \text{ genau dann, wenn } w(\alpha_s) \succ 0 \text{ gilt.}}$

b) Wir schreiben α_i statt α_{s_i}. Es gilt:

$$\begin{aligned} B(\alpha_1, \alpha_2) &= -\cos(\tfrac{\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2}, \\ B(\alpha_1, \alpha_3) &= -\cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0, \\ B(\alpha_2, \alpha_3) &= -\cos(\tfrac{\pi}{\infty}) = -1. \end{aligned}$$

b) Wir beweisen konsequent, dass $l(s_2s_3s_2s_3) = 4$ gilt:

Schritt 1. Es gilt $l(s_2) = 1$.

Schritt 2. Wir beweisen $l(s_2s_3) > l(s_2)$:

$$s_2(\alpha_3) = \alpha_3 - 2B(\alpha_2, \alpha_3)\alpha_2 = \alpha_3 + 2\alpha_2 \succ 0.$$

Schritt 3. Wir beweisen $l(s_2s_3s_2) > l(s_2s_3)$:

$$\begin{aligned} s_2s_3(\alpha_2) = s_2\Big(\alpha_2 - 2B(\alpha_3, \alpha_2)\alpha_3\Big) = s_2(\alpha_2 + 2\alpha_3) \ &= \alpha_2 + 2\alpha_3 - 2B(\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3)\alpha_2 \\ &= \alpha_2 + 2\alpha_3 - 2(1-2)\alpha_2 = 3\alpha_2 + 2\alpha_3 \succ 0. \end{aligned}$$

Schritt 4. Wir beweisen $l(s_2s_3s_2s_3) > l(s_2s_3s_2)$:

$$\begin{aligned} s_2s_3s_2(\alpha_3) = s_2s_3(\alpha_3 + 2\alpha_2) \ &= s_2s_3(\alpha_3) + 2s_2s_3(\alpha_2) \\ &= s_2(-\alpha_3) + 2(3\alpha_2 + 2\alpha_3) \ = -(\alpha_3 + 2\alpha_2) + 2(3\alpha_2 + 2\alpha_3) \\ &= 4\alpha_2 + 3\alpha_3 \succ 0. \end{aligned}$$