Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Abgabe am Fr 23.05, 10:30 Uhr (Üb.)
oder früher nach Vereinbarung

Coxetergruppen II
Übungsblatt 3

Aufgabe 1.

a) Lesen Sie aufmerksam die Infomation auf Seite 2 des Übungsblatts 2 und lösen Sie die Teile 4)-6) der Aufgabe 3 des Übungsblatts 2.

b) Wir betrachten folgende Matrizen aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Leiten Sie aus a) folgendes ab:

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &= \langle a, b \mid a^4 = 1, b^6 = 1, a^2 = b^3 \rangle, \\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) &= \langle [a], [b] \mid [a]^2 = 1, [b]^3 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

c) Wir betrachten den Epimorphismus $\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_2$. Es ist klar, dass $\mathrm{Ker}(\det) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist. Leiten Sie daraus und aus b) das Folgende ab:

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) &= \langle a, b, c \mid a^4 = 1, b^6 = 1, a^2 = b^3, c^2 = 1, c^{-1}ac = a^{-1}, c^{-1}bc = b^{-1} \rangle, \\ \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}) &= \langle [a], [b], [c] \mid [a]^2 = 1, [b]^3 = 1, [c]^2 = 1, [c]^{-1}[a][c] = [a]^{-1}, [c]^{-1}[b][c] = [b]^{-1} \rangle. \end{aligned}$$

d) Seien $s_1 := [c], s_2 := [c][b], s_3 := [a]$. Leiten Sie aus c) ab:

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}) = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1, (s_1 s_3)^2 = 1, (s_1 s_2)^3 = 1 \rangle.$$

Somit ist $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ eine Coxeter-Gruppe mit dem Coxeter-Graph $\circ\!-\!\circ\overset{\infty}{-}\circ$.

e) Erklären Sie den Sinn der folgenden Schreibweisen:

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6, & \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3, \\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) &= D_4 *_{D_2} D_6, & \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}) &= D_2 *_{D_1} D_3. \end{aligned}$$

Fortsetzung Seite 2.

Zum Information:

Sei $W = \langle S \mid s^2 = 1, (ss')^{m(s,s')} = 1 \;\; (s, s' \in S)\rangle$ eine Coxeter-Gruppe.
Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $\{\alpha_s \mid s \in S\}$ und sei V^* der Dualraum zu V.
Die Gruppe W operiert auf V und auf V^* wie folgt:

$$\begin{aligned} s(v) &= v - B(v, \alpha_s)\alpha_s, \\ w(f)(v) &= f(w^{-1}(v)). \end{aligned}$$

Sei $\{f_s \mid s \in S\}$ die Dualbasis zu $\{\alpha_s \mid s \in S\}$.
$D = \{f \in V^* \mid \langle f, \alpha_s\rangle \geqslant 0 \;\; (s \in S)\}$ heißt *Tits-Bereich* für W in V^*.
Satz. D ist ein Fundamentalbereich für die Operierung von W auf $U := W(D)$.

Aufgabe 2. Sei $W = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = 1\rangle$. Sei f_1, f_2 die Dualbasis zu Basis $\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}$ von V. In der Vorlesung haben wir berechnet, dass für ein beliebiges $f = af_1 + bf_2$ aus V^* folgendes gilt:

$$\begin{aligned} s_1(f) &= -af_1 + (2a + b)f_2, \\ s_2(f) &= (2b + a)f_1 - bf_2. \end{aligned}$$

Auch haben wir verstanden, dass $D = \{af_1 + bf_2 \mid a, b \geqslant 0\}$ ist.

1) Malen Sie D, $s_1(D)$, $s_2(D)$, $s_2s_1(D)$ und $s_1s_2(D)$.
2) Sei $U := \bigcup_{w \in W} w(D)$. Beweisen Sie, dass $\overline{U} = \{\alpha f_1 + \beta f_2 \mid \alpha + \beta \geqslant 0\}$ ist.

Aufgabe 3. Sei Φ das Wurzelsystem für W in V. Seien Φ^+ und Φ^- die Mengen von positiven und negativen Wurzeln. Beweisen Sie das Folgende:
1) $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$.
2) $|\Phi| < \infty \Leftrightarrow |W| < \infty$.

Hinweis. 1) folgt unmittelbar aus einem Satz oder einem Lemma in der Vorlesung. Zitieren Sie den Satz (das Lemma).

Aufgabe 4. Zeigen Sie:
1) Für alle $s \in S$ gilt $s(\Phi^+) = (\Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}) \cup \{-\alpha_s\}$.
2) Für alle $w \in W$ gilt $|w(\Phi^+) \cap \Phi^-| < \infty$.

Hinweis. 1) kann durch eine kurze direkte Berechnung mit Hilfe der Aufgabe 3.1) bewiesen werden.

Bemerkung. *Die Aufgaben 3 und 4 sind notwendig, um zu zeigen, dass $U \neq V^*$ ist genau dann, wenn W unendlich ist. Das wird nach einer Woche als Aufgabe angeboten.*
Keine weitere Aufgaben.