Klausur Coxetergruppen, WS 13/14

(Prof. O. Bogopolski)

Aufgabe 1. Geben Sie Definitionen von folgenden Begriffen:

1) Eine Spiegelungsgruppe. [1 Punkt]
2) Ein Wurzelsystem. [1 Punkt]
3) Ein positives System in einem Wurzelsystem. [1 Punkt]
4) Ein einfaches System in einem Wurzelsystem. [1 Punkt]

Aufgabe 2. Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des Euklidschen Raums $\mathbb{R}^n$.
Für jedes Tupel $c = (c_1, \dots, c_n)$ der Zahlen $c_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, \dots, n$, und für jede Permutation $\sigma \in S_n$ definieren wir eine lineare Abbildung $T_{c,\sigma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$T_{c,\sigma}(e_i) = c_i e_{\sigma(i)}.$$

Sei W die Gruppe, die aus allen solchen $T_{c,\sigma}$ besteht.

1) Beweisen Sie, dass W eine Spiegelungsgruppe ist. [6 Punkte]
2) Beschreiben Sie das Wurzelsystem Φ, das mit W assoziiert ist. [6 Punkte]
3) Geben Sie ein einfaches System in Φ. [6 Punkte]
4) Beweisen Sie, dass $W \cong S_n \times \mathbb{Z}_2^n$ ist. [5 Punkte]

Lösung.

1) Merken wir an:

   a) $s_{e_i - e_j}$ permutiert e_i und e_j und fixiert alle e_k für $k \neq i, j$.

   b) s_{e_i} bildet e_i auf $-e_i$.

   Daraus folgt $s_{e_i - e_j}, s_{e_i} \in W$ und sogar $W = \langle s_{e_i - e_j}, s_{e_i} \rangle$. Deswegen ist W eine Spiegelungsgruppe.

2) Nach Satz 1.2.4. ist $\Phi := \bigcup\limits_{s_\alpha \in W, ||\alpha||=1} \{\alpha, -\alpha\}$.

   Insbesondere liegen $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i - e_j)$ und $\pm e_i$ in Φ. Wir können noch nicht sagen, das Φ nur aus diesen Vektoren besteht, da W noch andere Spiegelungen s_α besitzen kann. Wir wissen aber: für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ muss $s_\alpha(\beta)$ in Φ liegen. Wir berechnen:

   $$s_{e_j}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i - e_j)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i + e_j).$$

   Deswegen vermuten wir, dass

$\Phi = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm e_i \pm e_j), \pm e_i\}$ ist.

Tatsächlich:

(a) Φ ist ein Wurzelsystem
(das ist leicht zu überprüfen),

(b) $W_\Phi = \langle s_{e_i - e_j}, s_{e_i + e_j}, s_{e_i} \rangle$
(nach Definition von W_Φ im Abschnitt 1.4),

(c) $W_\Phi = W$
(Es genügt zu zeigen, dass $s_{e_i+e_j} \in W$ ist.
Das gilt, da $s_{e_i+e_j}(e_i) = -e_j$ und $s_{e_i+e_j}(e_j) = -e_i$ ist.)

3) Als eine der vielen möglichen Varianten gilt: $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$ mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e_1, \\ \alpha_2 &= e_2 - e_1, \\ \alpha_3 &= e_3 - e_2, \\ &\vdots \\ \alpha_n &= e_n - e_{n-1}. \end{aligned}$$

In der Tat:
(a) alle e_i sind positive Kombinationen von Elementen aus Δ,
(b) alle $e_i + e_j$ sind positive Kombinationen von Elementen aus Δ (das folgt aus (a)),
(c) alle $e_i - e_j$ mit $i > j$ sind positive Kombinationen von Elementen aus Δ.

3) Seien W_1 und W_2 die Untergruppen von W, die S_n und $\mathbb{Z}_2^n$ isomorph sind.
Dann gilt:
(a) $W = \langle W_1, W_2 \rangle$,
(b) W_1 und W_2 sind normal in W,
(c) $W_1 \cap W_2 = 1$.
Daraus folgt $W \cong W_1 \times W_2$.

Eine andere Lösung ist zu zeigen, dass die folgende Abbildung ein Isomorphismus ist:

$$\mathbb{Z}_2^n \times S_n \to W,$$
$$(c, \sigma) \mapsto T_{c,\sigma}.$$

Aufgabe 3. Sei $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die Standardbasis des Euklidschen Raums $\mathbb{R}^4$. Wir betrachten die Gitter $L' := \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3 + \mathbb{Z}e_4$ und

$$L := L' + \mathbb{Z}\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} e_i\Big).$$

Sei $\Phi := \{x \in L \,|\, ||x||^2 \in \{1, 2\}\}$. Es gilt

$$\Phi = \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j, \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}.$$

Hier sind alle Vorzeichen voneinander unabhängig; in $\pm e_i \pm e_j$ ist $i \neq j$.

1) Berechnen Sie $|\Phi|$. [1 Punkt]

2) Beweisen Sie, dass Φ ein Wurzelsystem in $\mathbb{R}^4$ ist. [6 Punkte]

3) Sei $\prec$ die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{R}^4$, die von $0 \prec e_4 \prec e_3 \prec e_2 \prec e_1$ induziert ist. Sei $\prod$ ein positives System in Φ bezüglich $\prec$. Schreiben Sie alle Elemente von $\prod$ auf. [6 Punkte]

4) Sei $\Delta := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, wobei

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \ e_2 - e_3, \\ \alpha_2 &= \ e_3 - e_4, \\ \alpha_3 &= \ e_4, \\ \alpha_4 &= \ \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \end{aligned}$$

ist. Beweisen Sie, dass Δ ein einfaches System ist. [6 Punkte]

5) Berechnen Sie die Coxeter-Matrix $A(\Delta)$. Dabei vergessen Sie nicht, die Vektoren α_i zu normieren. Malen Sie den Coxeter-Graph $\Gamma(\Delta)$. [6 Punkte]

6) Beweisen Sie, dass die Weyl-Gruppe W_Φ transitiv auf der Menge $\Phi_2 = \{\pm e_i \pm e_j\}$ operiert. Leiten Sie daraus ab (mit einer Begründung), dass $|W_\Phi| = 24 \cdot \mathrm{St}_{W_\Phi}(\alpha_1)$ ist. [6 Punkte]

7) Es ist bekannt, dass $\mathrm{St}_{W_\Phi}(\alpha_1)$ eine Weyl-Gruppe mit folgendem Coxeter-Graph ist:

$$\circ \overset{4}{\text{———}} \circ \text{———} \circ$$

Berechnen Sie $|\mathrm{St}_{W_\Phi}(\alpha_1)|$ mit Hilfe der Witt-Formel. [5 Punkte]
Berechnen Sie $|W_\Phi|$. [1 Punkt]

1) $|\Phi| = 2 \cdot 4 + 4 \cdot \binom{4}{2} + 2^4 = 8 + 4 \cdot 6 + 16 = 48.$

2) Wir müßen folgende Axiome überprüfen:

(R1) $\alpha \in \Phi \Rightarrow -\alpha \in \Phi$ und $r \cdot \alpha \notin \Phi$ für $r \in \mathbb{R}, r \neq \pm 1$;

(R2) $s_\alpha(\Phi) = \Phi$ für alle $\alpha \in \Phi$.

Das Axiom (R1) ist offensichtlich. Wir überprüfen (R2). Wir werden die Definition

$$\Phi := \{x \in L \,|\, ||x||^2 \in \{1, 2\}\}$$

benutzen. Merken wir an, dass $||s_\alpha(x)|| = ||x||$ gilt. Deswegen genügt es zu zeigen:

$$x \in L \Rightarrow s_\alpha(x) \in L.$$

Wir haben $s_\alpha(x) = x - 2\frac{(\alpha,x)}{(\alpha,\alpha)} \cdot \alpha$.

Deswegen genügt es zu zeigen, dass $2\frac{(\alpha,x)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$ für $\alpha \in \Phi$ und $x \in L$ gilt. Dafür muss man folgende 8 Varianten überprüfen:

$\alpha \setminus x$	e_i	$\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$
e_i	2	1
$e_i - e_j$	1	0
$e_i + e_j$	1	1
$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$	± 1	$0, \pm 1, \pm 2$

3) $\prod = \{e_k, e_i - e_j (i < j), e_s + e_t, \frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}$.

4)

$$\begin{aligned}
e_4 &= && \alpha_3, \\
e_3 &= && \alpha_2 + \alpha_3, \\
e_2 &= && \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\
e_1 &= && 2\alpha_4 + e_2 + e_3 + e_4, \\
e_i + e_j &= && \text{eine positive Kombination von } \alpha_i, \\
e_1 - e_2 &= && 2\alpha_4 + e_3 + e_4, \\
e_1 - e_3 &= && 2\alpha_4 + e_2 + e_4, \\
e_1 - e_4 &= && 2\alpha_4 + e_2 + e_3, \\
e_2 - e_3 &= && \alpha_1, \\
e_2 - e_4 &= && \alpha_1 + \alpha_2, \\
e_3 - e_4 &= && \alpha_2, \\
\tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) &= && \alpha_4, \\
\tfrac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) &= && \alpha_4 + c_1 e_2 + c_3 e_3 + c_4 e_4 \text{ mit } c_i \in \{0, 2\}.
\end{aligned}$$

5) Nach der Formel $A(\Delta)_{ij} = -\left(\frac{\alpha_i}{||\alpha_i||}, \frac{\alpha_j}{||\alpha_j||}\right)$ berechnen wir

$$A(\Delta) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(\Delta) : \quad \underset{\alpha_1}{\circ} - \underset{\alpha_2}{\circ} \overset{4}{-} \underset{\alpha_3}{\circ} - \underset{\alpha_4}{\circ}$$

6) Wir zeigen, dass für je zwei Elemente $x, y \in \Phi_2$ ein $w \in W_\Phi$ existiert, so dass $w(x) = y$ ist:

$$\begin{aligned} s_{e_k - e_j}(e_i + e_k) &= e_i + e_j \\ s_{e_i}(e_i + e_j) &= e_j - e_i \end{aligned}$$

7) Sei $G := \mathrm{St}_{W_\Phi}(\alpha_1)$ und $\nabla = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. Die Witt-Formel für G und ∇ ist

$$\sum_{\nabla' \subseteq \nabla} (-1)^{|\nabla'|} \cdot \frac{|G|}{|G_{\nabla'}|} = 1.$$

∇	$\emptyset$	$\{\alpha_2\}$	$\{\alpha_3\}$	$\{\alpha_4\}$	$\{\alpha_2, \alpha_3\}$	$\{\alpha_2, \alpha_4\}$	$\{\alpha_3, \alpha_4\}$	$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$
$\lvert G_{\nabla'}\rvert$	1	2	2	2	8	4	6	$\lvert G\rvert$

$$|G|\Big(1 - \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\Big) - \frac{1}{|G|}\Big) = 1.$$

Daraus folgt: $|G| = 48$.
$|W| = |\Phi_2| \cdot |\mathrm{St}_{W_\Phi}(\alpha_1)| = 24 \cdot 48 = 1152.$