Prof. Dr. Oleg Bogopolski — Abgabe am Mo 16.12, 16:30 Uhr (Üb.)
. — oder vor 16:30 Uhr nach Vereinbarung

Coxetergruppen
Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Sei Φ ein endliches Wurzelsystem in V und sei W die Weyl-Gruppe von Φ.

1) Sei $\dim(\mathrm{Span}(\Phi)) = 2$.
   a) Schreiben Sie eine (parametrische) Präsentation von W auf.
   b) Beweisen Sie, dass W isomorph der Symmetriegruppe eines regularen n-Ecks ist.
2) Sei $\dim(\mathrm{Span}(\Phi)) = 3$. Nach Satz 1.8.1 des Kurzskripts hat W eine Präsentation der Form
$$\langle a, b, c \,|\, a^2 = b^2 = c^2 = 1, (ab)^k = (ac)^l = (bc)^m = 1\rangle$$
für einige $2 \leqslant k \leqslant l \leqslant m$.
   a) Beweisen Sie, dass (k, l, m) gleich $(2, 2, m)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, oder $(2, 3, 5)$ ist.
   b) Beweisen Sie, dass die entsprechenden Weyl-Gruppen W die Ordnungen $4m$, 24, 48 und 120 haben.

Hinweis. Für 2a) und 2b) benutzen Sie die Witt-Formel aus Korollar 1.11.4 des Kurzskripts. Diese Formel wird Sie zur Ungleichung $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} > 1$ mit $k, l, m \geqslant 2$ führen.

Aufgabe 2. Sei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$. Aus dem Übungsblatt 1 (Aufgabe 3b) wissen wir, dass das folgende System Ψ ein Wurzelsystem in $\mathbb{R}^3$ ist:
$$\Psi := \{c_ie_i + c_je_j \,|\, i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j, c_i, c_j \in \{-1, 1\}\}.$$
Sei $\Delta = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, wobei
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
ist. Aus der Aufgabe 3c) des Übungsblatts 1 wissen wir, dass Δ ein einfaches System in Ψ ist. Deswegen gilt $W = \langle s_\alpha, s_\beta, s_\gamma\rangle$. Sei $w_0 \in W$ das Element der maximalen Länge bezüglich dieses Erzeugersystems.
1) Schreiben Sie w_0 als ein Wort von s_α, s_β, s_γ auf.
2) Wie operiert w_0 auf Eckpunkten des Standardwürfels?

Hinweis: Nach Satz 1.9.3.2) des Kurzskripts gilt $w_0(\prod) = -\prod$ für das positive System $\prod$, das Δ enthält. Um w_0 zu konstruieren, benutzen Sie den Satz 1.4.2$'$ des Kurzskripts.

`Fortsetzung Seite 2.`

Aufgabe 3. Seien α, β, γ, Δ, Ψ und W wie in Aufgabe 2. Sei D der Fundamentalbereich für die Operierung der Gruppe W auf $\mathbb{R}^3$ bezüglich Δ und sei K der 3-dimensionale Standardwürfel.

1) Malen Sie $D \cap K$.
2) Malen Sie $s_\alpha(D) \cap K$ und $s_\gamma s_\alpha(D) \cap K$.
3) Sei
$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
und sei $w \in W$, so dass $w(v) \in D$ gilt. Stellen Sie w als Wort von $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ dar.
4) Finden Sie $\mathrm{St}_W(v)$.
5) Finden Sie $\mathrm{St}^*_W(E)$, wobei E die Kante des Standardwürfels ist, die die folgenden Punkte verbindet:
$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

`Keine weiteren Aufgaben.`