Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Abgabe am Mo 2.12, 16:30 Uhr (Üb.)
oder vor 16:30 Uhr nach Vereinbarung

Coxetergruppen
Übungsblatt 3

Aufgabe 1. (verbesserte Aufgabe 4 aus Übungsblatt 2)
Sei Φ ein Wurzelsystem in $\mathbb{R}^n$ mit $\dim(\Phi) = n$. Beweisen Sie folgendes:

(a) Die Anzahl von einfachen Systemen Δ in Φ ist nicht größer als $\binom{|\Phi|}{n}$.

(b) $|W_\Phi| \leqslant \binom{|\Phi|}{n} \cdot n!$.

Hinweis. Für (b) benutzen Sie die Behauptung 2) des Satzes 1.4.3 im Kurzskript (im Netz).

Aufgabe 2. Sei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$. Aus dem Übungsblatt 1 (Aufgabe 3b) wissen wir, dass das folgende System Ψ ein Wurzelsystem in $\mathbb{R}^3$ ist:

$$\Psi := \{\alpha_i e_i + \alpha_j e_j \,|\, i, j \in \{1,2,3\}, i \neq j, \alpha_i, \alpha_j \in \{-1, 1\}\}.$$

1) Beweisen Sie, dass die Weyl-Gruppe W_Ψ die folgende Präsentation hat:

$$\langle a, b, c \,|\, a^2 = b^2 = c^2 = 1, (ab)^2 = 1, (ac)^3 = 1, (bc)^3 = 1\rangle.$$

2) Wir definieren $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $w(x) = -x$, für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Beweisen Sie: $w \notin W_\Psi$.
3) Beweisen Sie, dass die Symmetriegruppe eines Würfels 48 Elemente hat.
4) Beweisen Sie, dass $|W_\Psi| = 24$ ist.
5) Beweisen Sie, dass $W_\Psi \cong S_4$ ist.

Hinweis. Für 2) benutzen Sie die Behauptung 1.7.5 des Kurzskripts im Netz und die Determinante. Leiten Sie 4) aus 2), 3) und aus der Aufgabe 1(d) im Übungsblatt 2 ab.

Aufgabe 3. In der letzten Vorlesung haben wir den folgenden Satz formuliert:
Für $\alpha \in \Delta$ und $w \in W$ gilt:

1) $w(\alpha) \succ 0 \Rightarrow l(ws_\alpha) = l(w) + 1$,
2) $w(\alpha) \prec 0 \Rightarrow l(ws_\alpha) = l(w) - 1$.

Punkt 1) haben wir bewiesen. Leiten Sie 2) aus 1) ab.

`Fortsetzung Seite 2.`

Aufgabe 4. Seien

- Φ ein Wurzelsystem in V,
- Δ ein einfaches System in Φ,
- W die Weyl-Gruppe für Φ,
- $l : W \to \mathbb{N}_0$ die Länge-Funktion bezüglich des Erzeugersystems $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$.

Für jede Teilmenge $\Delta' \subseteq \Delta$ definieren wir eine Untergruppe und eine Teilmenge von W:

$$\begin{aligned} W_{\Delta'} &:= \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta' \rangle, \\ W^{\Delta'} &:= \{w \in W \mid l(ws_\alpha) > l(w) \text{ für alle } \alpha \in \Delta'\}. \end{aligned}$$

In der Vorlesung haben wir bewiesen, dass sich jedes $w \in W$ als $w = uv$ mit $u \in W^{\Delta'}$ und $v \in W_{\Delta'}$ aufschreiben läßt. Dabei haben wir u als ein Element in der Nebenklasse $wW_{\Delta'}$ mit minimaler Länge gewählt.

a) Beweisen Sie, dass $l(w) = l(u) + l(v)$ ist.
b) Beweisen Sie, dass es nur ein Element in $wW_{\Delta'}$ mit der minimalen Länge gibt.

Hinweis zu a): Sei $u = s_1 \dots s_q$ mit $q = l(u)$ und sei $v = s'_1 \dots s'_p$ mit $p = l(v)$. Dann gilt $w = s_1 \dots s_q s'_1 \dots s'_p$. Wenn $l(w) < l(u) + l(v)$ ist, dann können Sie Satz 1.7.3 anwenden, um einen Widerspruch zu bekommen. Dabei müssen 3 Fälle für die zwei weggelassenen Buchstaben betrachtet werden.

`Keine weitere Aufgaben werden gestellt.`