Prof. Dr. Oleg Bogopolski

.

Abgabe am Mo 28.10, 16:30 Uhr (Üb.)
oder vor 16:30 Uhr nach Vereinbarung

Coxetergruppen
Übungsblatt 1
(enthält nur 3 Aufgaben)

Definition. Zwei Elemente g_1, g_2 einer Gruppe G nennt man *konjugiert*, falls ein drittes Element $h \in G$ existiert, so dass $g_2 = h^{-1}g_1h$ gilt. Die *Konjugationsklasse* des Elements $g \in G$ ist die Menge aller Elemente von G, die mit g konjugiert sind.

Aufgabe 1.
a) Beweisen Sie, dass alle Spiegelungen in der Dihedergruppe D_3 konjugiert sind.
b) Beweisen Sie, dass nicht alle Spiegelungen in D_4 konjugiert sind.
c) Wie viele Konjugationsklassen von Elementen in D_4 gibt es?
d) Wie viele Konjugationsklassen von Elementen in D_n gibt es?

Hinweis. Sei g eine Spiegelung. Dann gilt $D_n = H \cup gH$, wobei H die Untergruppe von Rotationen ist. Was passiert, wenn Sie g mit einem $h \in H$ oder mit einem $h \in gH$ konjugieren? Was passiert mit der Achse von g nach der Konjugation?

Aufgabe 2. Die Permutationsgruppe S_n operiert auf $\mathbb{R}^n$ durch Permutationen von Elementen der Standardbasis: $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Es ist leicht zu sehen, dass S_n den Vektor $e := \sum_{i=1}^{n} e_i$ fixiert. Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ die Ebene, die dem Vektor e orthogonal ist. Diese Ebene ist S_n-invariant und $\mathrm{Fix}_H(S_n) = \{0\}$. Da $\dim H = n-1$ ist, ist es möglich S_n als eine Untergruppe von $O(\mathbb{R}^{n-1}) \cong O(H)$ zu betrachten.

(a) Zeigen Sie, dass S_n von Transpositionen $(1, i)$, wobei $1 \leqslant i \leqslant n$, erzeugt ist.

(b) Sei $n = 4$. Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen der Transpositionen $(1, 2), (1, 3) \in S_4$ in der folgenden othonormierten Basis v_1, v_2, v_3 der Ebene H:

$$\begin{aligned} v_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2), \\ v_2 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4), \\ v_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_4). \end{aligned}$$

(c) Überprüfen Sie, dass die Matrizen aus (b) tatsächlich Orthogonalmatrizen sind.

Aufgabe 3. Sei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$.
a) Beweisen Sie, dass das folgende System Φ kein Wurzelsystem in $\mathbb{R}^3$ ist:

$$\Phi := \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \,|\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{-1, 1\}\}.$$

b) Beweisen Sie, dass das folgende System Ψ ein Wurzelsystem in $\mathbb{R}^3$ ist:

$$\Psi := \{\alpha_i e_i + \alpha_j e_j \,|\, i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j, \alpha_i, \alpha_j \in \{-1, 1\}\}.$$

c) Finden Sie ein einfaches System Δ in Ψ.