Klassischen Gruppen und ihre Lie-Algebren

Einleitung

Diese Datei enthält eine Ausarbeitung des Vortrags **"Klassischen Gruppen und ihre Lie-Algebren"**. Der Vortrag besteht aus zwei Teilen. Im 1.Teil werden einige klassischen Gruppen und ihre Lie-Algebren kennengelernt. Der zweite Teil bietet eine Vertiefung in die Theorie der Lie-Gruppen.

1.Teil

Die Orthogonale Gruppe:

Sei $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine nicht ausgeartete quadratische Form. Das bedeutet $q(x) = b(x, x)$ für eine symmetrische Bilinearform $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, und es gilt: $[\forall y \in \mathbb{R}^n : b(x, y) = 0] \Rightarrow x = 0$.
Die orthogonale Gruppe zu q ist

$$O(q) = \{A \in Gl_n(\mathbb{R}) \mid \forall v \in \mathbb{R}^n : q(Av) = q(v)\}.$$

Sei Q die Darstellungsmatrix der Bilinearform b zu q. Dann gilt:

$$O(q) = \{A \in Gl_n(\mathbb{R}) \mid A^T QA = Q\}.$$

und ihre Lie-Algebra

$$\mathfrak{o}(q) = \mathfrak{Lie}(O(q)) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid X^T Q + QX = 0\}.$$

Spezialfall:
Es sei $q(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2$. Dann ist $O(q) = O_n(\mathbb{R}) = \{A \in Gl_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I_n\}$.In diesem Fall ist $Q = I_n$ und folglich ist

$$\mathfrak{o}(\mathbb{R}) = \mathfrak{Lie}(O_n(\mathbb{R})) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}$$

die Menge der *schiefsymmetrischen* Matrizen.

Die symplektische Gruppe $Sp_n(\mathbb{R})$:

Sei $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$Sp_n(\mathbb{R}) = \{A \in Gl_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J A = J\} \subset Gl_{2n}(\mathbb{R}).$$

Ihre Lie-Algebra ist

$$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^T J + JX = 0\}.$$

Die unitäre Gruppe $U_n(\mathbb{R})$:

$$U_n = \{A \in Gl_n(\mathbb{C}) \mid A\overline{A}^T = I_n\}.$$

Die zugehörige reelle Lie-Algebra

$$\mathfrak{u}_n = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid X = -\overline{X}^T\}$$

ist die Menge der *schiefhermitischen* Matrizen.

Satz 0.1 *Ist $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale reelle oder komplexe Lie-Algebra,so ist $Aut(\mathfrak{g}) \subset GL(\mathfrak{g})$ eine lineare Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra*

$$\mathfrak{Lie}(Aut(\mathfrak{g})) = \mathfrak{Der}(\mathfrak{g}) = \{D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \mid D \in End(V)\}.$$

2. Teil

Sei G eine lineare Lie-Gruppe und $\mathfrak{g} = \mathfrak{Lie}(G)$. Für $A \in G, X \in \mathfrak{g}$ ist $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$ nach Lemma 1.41. Für $A \in G$ setze $Ad_A(X) = AXA^{-1}$, dann ist $Ad_A \in GL(\mathfrak{g})$. Die Zuordnung

$$Ad : G \to Aut(\mathfrak{g}), A \mapsto Ad_A$$

definiert einen Morphismus von topologischen Gruppen. Wir nennen Ad die **adjungierte Darstellung** von G. Wenn G wegzusammenhängend ist, so ist der Kern von Ad gleich dem **Zentrum** von G, d.h.

$$Kern(Ad) = Z(G) = \{A \in G \mid \forall B \in G \text{ gilt } ABA^{-1} = B\}.$$

Lemma 0.2 *Sei (A_k) eine Folge in G mit $A_k \to I_n$ und $Y_k = log(A_k)$. Dann liegt jeder Häufungspunkt der Folge $(\frac{Y_k}{\|Y_k\|})$ in $\mathfrak{Lie}(G)$.*

Lemma 0.3 *Sei W ein Komplement von $\mathfrak{Lie}(G)$ in $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, d.h. $W \oplus \mathfrak{Lie}(G) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Dann gibt es eine offene Umgebung U_W von $0 \in W$, so dass*

$$exp(U_W) \cap G = \{I_n\}.$$

Satz 0.4 *Es existiert eine Umgebung*

$$V_\varepsilon = \{A \in G \mid \|I_n - A\| < \varepsilon\}$$

der Einheitsmatrix I_n in G, so dass $log(V) \subseteq \mathfrak{Lie}(G)$.

Korollar 0.5 *Es existiert eine Umgebung U_0 der 0 in $\mathfrak{Lie}(G)$, so dass exp_G die Umgebung U_0 homöomorph auf eine Umgebung $V_{I_n} \subseteq G$ der Einheitsmatrix I_n abbildet. Man nennt U_0 auch* ***Exponentialkoordinatenumgebung****.*

Korollar 0.6 *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Witer sei U_0 eine Exponentialkoordinatenumgebung in $\mathfrak{g}$ und G^0 die Komponente der Identität von G. Dann lässt sich jedes $A \in G^0$ schreiben als*

$$A = exp(X_1) \cdots exp(X_k)$$

für gewisse $X_1, \ldots, X_k \in U_0$.

Definition 0.7 Als die **Dimension** einer linearen Lie-Gruppe G bezeichnen wir die Vektorraumdimension von $\mathfrak{Lie}(G)$.

Sei $A \in G$. Die Abbildung

$$L_A : G \to G, B \mapsto AB$$

ist stetig, da G eine topologische Gruppe ist. Die inverse Abbildung $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$ ebenso. Also ist L_A ein Homöomorphismus des topologische Raumes G. Insbesondere wird eine offene Teilmenge $V \subseteq G$ durch L_A wieder in eine offene Teilmenge $L_A(V) \subseteq G$ abbildet. Dies kann man auf die Einheitsmatrix I_n anwenden: Ist V_{I_n} eine offene Umgebung von I_n, so ist $L_A(V_{I_n})$ eine offene Umgebung von A. Ist $V_{I_n} = exp(U_0)$, so bilden die Menge $L_A(exp(U_0))$ eine Überdeckung von G aus offenen Mengen, die homöomorph zu U_0 sind. Dies definiert die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit auf G:

Satz 0.8 *Das Mengensystem*

$$\mathfrak{A} = \{L_A(exp(U_0)) \mid A \in G\}$$

bildet einen differenzierbaren Atlas für den topologischen Raum G.

Definition 0.9 Sei$A \in G$. Der **Tangentialraum** von G in A ist

$$T_A G = \{c'(0) \mid c : \mathbb{R} \to G \text{ ist eine } C^\infty\text{-Kurve mit } c(0) = A\}.$$

Lemma 0.10 *$T_{I_n}G$ ist ein Untervektorraum von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ und es ist $T_{I_n}G = \mathfrak{Lie}(G)$.*

Bemerkung 0.11 Für den Tangentialraum von $A \in G$ gilt

$$T_A G = A \cdot T_{I_n} G.$$

Literatur

Baues, Oliver: *Lie Gruppen und Lie-Agebren.* 2006