Einführende Definitionen und Sätze zu Lie-Gruppen und -Algebren
Vortrag vom 13. April

von Tom Day

Die Theorie um die Lie-Gruppen und -Algebren greift auf vielerlei Themengebiete der Mathematik zu, allen voran der linearen Algebra, der Gruppentheorie und der Topologie. Um dem Rechnung zu tragen, beginnt Baues mit einigen hilfreichen Aussagen über topologische Gruppen im Allgemeinen und im Besonderen ((1.1) bis (1.13)) , ehe er die Definitionen zu Lie-Gruppen (1.14) und zu Lie-Algebren präsentiert, noch ohne in diesem ersten Teil bis (1.26) eine Verbindung zwischen beiden Objekten herzustellen.
Diese ersten Definitionen und Sätze werden wir im Folgenden ausführen, insbesondere die im Vortrag vom 13. April leidlich unterschlagenen Beispiele der Einbettung $GL_n(\mathbb{C})$ in $GL_{2n}(\mathbb{R})$ aus (1.15) sowie (1.25) und (1.26).

Zunächst erklärt Baues natürlich die interessierenden Objekte, nämlich topologische Gruppen. Diese sollen nicht nur den üblichen Gruppenaxiomen genügen, sondern auch mit der jeweiligen Topologie verträglich sein, also:

Definition (1.1): Eine *topologische Gruppe* G in einem topologischen Raum X ist eine Gruppe, deren Verknüpfung und Inversenbildung bezüglich der Topologie auf X stetig sind.

In (1.2) erwähnt Baues, dass auch Untergruppen topologischer Gruppen wiederum topologisch sind, dann folgen einige Beispiele, etwa der wohlbekannte Einheitskreis der komplexen Zahlenebene:

Beispiel (1.3): $S^1 = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}$ bildet eine topologische Gruppe.

Im Folgenden bezeichne G stets eine topologische Gruppe.
Kernbestandteil der mathematischen Betrachtung sind nicht nur die Objekte, sondern auch die Beziehungen zwischen den Objektion, d.h. die Abbildungen zwischen ihnen. Diese sollen ebenfalls sowohl die Gruppenstruktur als auch die topologische respektieren:

Definition (1.4): Für zwei topologische Gruppen G und H nennen wir $f : G \to H$ einen *Homomorphismus in der Kategorie der topologischen Gruppen*, wenn f linear und stetig ist. Entsprechend heiße f *Isomorphismus in der Kategorie der topologischen Gruppen*, wenn f darüberhinaus über eine stetige Umkehrabbildung $f^{-1} : H \to G$ verfügt.

Auch hier bringt Baues einige wohlbekannte Beispiele an, mit deren Linearität und Stetigkeit wir wohlvertraut sind, z.B.:

Beispiel (1.5): $exp : (\mathbb{R}, +) \to (S^1, *)$, $\varphi \to e^{i\varphi}$

Im Folgenden weist Baues für wichtige Matrizengruppen wichtige topologische Eigenschaften nach. Zunächst wenig überraschend:

Satz (1.6): $GL_n(\mathbb{R})$ bildet eine topologische Gruppe.

Beweis: Multiplizieren wir zwei Matrizen A und B, so entsteht in jedem Eintrag des Produktes ein polynomialer Ausdruck in den Einträgen von A und B, und Polynome über $\mathbb{R}$ stellen stetige Funktionen dar. Um Inverse zu bilden, sind uns einige Formeln bekannt, denen man die Stetigkeit gleichfalls schnell entnimmt. Baues schlägt hier $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * A'$ mit $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A^{i,j})$ vor, wobei $A^{i,j}$ der Matrix A ohne die i-te Zeile und j-te Spalte entspricht. Hierbei erinnere man sich in Hinblick auf *det* an die Entwicklungssätze nach Laplace und finde abermals polynomielle Ausdrücke wieder. Dass die Determinante also stetig ist, hebt Baues noch einmal in (1.7) hervor.

■

Nun beschreibt der Autor eine topologische Eigenschaft, die im hiesigen Kontext sofort nützliche gruppentheoretische Eigenschaften mit sich bringt:

Definition (1.8): In einer topologischen Gruppe G bezeichnen wir die Wegzusammenhangskomponente der Eins mit G^0, also:

$G^0 := \{g \in G | \exists \text{ stetige Abbildung } c : [0,1] \to G : c(0) = 1_G \wedge c(1) = g\}$

Lemma (1.9): $G^0 \lhd G$

Beweis: Die Aussage erklärt sich rasch durch den simplen Umstand, dass Kompositionen aus stetigen Funktionen abermals stetig sind. Sucht man also etwa einen Weg zum inversen Element von $g \in G^0$, so invertiert man einfach den Weg vom Einselement nach g, d.h. man invertiert bezüglich der Gruppenoperation. Ebenso führt das Produkt zweier Wege innerhalb der Gruppe zum Produkt der Endpunkte. Und dass ein Weg, der mit einem Element konjugiert wurde, zum entsprechenden Konjugat des Endpunktes führt, ist gleichsam klar. Wie erwähnt ergibt sich die Stetigkeit der entstehenden Abbildungen aus den vorausgesetzten Stetigkeiten von ursprünglichem Weg, der Gruppenverknüpfung und der Inversenbildung.

■

Lemma (1.10): Sei $V \subseteq G$ eine offene Menge, wobei $1_G \in V$. Sofern G zusammenhängend ist, erzeugt V dann bereits G.

Beweis: Es sei $H := \langle V \rangle$. Zeige, unter Erinnerung an den Zusammenhangsbegriff, dass H offen und abgeschlossen ist.

- H ist offen als Vereinigung offener Mengen, nämlich $H = \bigcup\limits_{h \in H} hV$. V ist per se offen und auch hV, etwa als Urbild der offenen Menge V unter der stetigen Multiplikation mit h^{-1}.

- H ist abgeschlossen, indem $G\backslash H$ offen ist, was ersichtlich wird mit der Zerlegung von G in disjunkte Nebenklassen von H: Sei $G' \subseteq G\backslash H$ ein Vertretersystem der Nebenklassen, dann ist
$$G = H \cup \underbrace{\bigcup_{g \in G'} gH}_{=G\backslash H}$$
Entsprechend zu vorigem Fall ist auch jede der Mengen gH offen, da H offen ist folglich ebenfalls $G\backslash H$.

$\blacksquare$

In Definition (1.11) erklärt Baues die orthogonale Gruppe $O_n(\mathbb{R})$ sowie ihre spezielle Untergruppe $SO_n(\mathbb{R})$, um an ihnen die eben eingeführten topologischen Begriffe zu demonstrieren:

Satz (1.12): $O_n(\mathbb{R})$ ist kompakt und es gilt $O_n(\mathbb{R})^0 = SO_n(\mathbb{R})$

Beweis: Erstens ist $O_n(\mathbb{R})$ beschränkt, indem jeder Matrixeintrag in seinem Betrag 1 nicht überschreitet; Zweitens ist die Menge abgeschlossen kraft ihrer definierenden Gleichung $AA^T = Id_n$. So gilt etwa, dass der Grenzwert einer konvergenten Folge von Matrizen, die der Gleichung genügen, selbst wieder selbige Relation erfüllen wird.
Und in Vektorräumen über R bedeutet Kompaktheit für eine Menge gerade, dass sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Was $SO_n(\mathbb{R})$ betrifft, weist Baues zuerst nach, dass diese Menge zusammenhängend ist, sodass $SO_n(\mathbb{R}) \subseteq O_n(\mathbb{R})^0$ gilt: Sei dazu $B \in SO_n(\mathbb{R})$, dann existiert bekanntermaßen eine Matrix $H \in O_n(\mathbb{R})$, sodass das Konjugat eine gewisse Normalform hat, nämlich
$$H^{-1}BH = \begin{pmatrix} (1) & & & \\ & D(\alpha_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & D(\alpha_k) \end{pmatrix}$$
wobei
$$D(\alpha_j) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_j) & \sin(\alpha_j) \\ -\sin(\alpha_j) & \cos(\alpha_j) \end{pmatrix}$$
Der 1×1-Block (1) tritt bei ungerader Dimension auf.
Hier lässt sich nun ersichtlich ein Weg zur $n \times n$-Einheitsmatrix konstruieren, der durch die Gruppe $SO_n(\mathbb{R})$ führt: Statte jedes der α_j mit einem Faktor t aus, sodass die Drehmatrix in die 2×2-Einheitsmatrix übergeht. Da $SO_n(\mathbb{R}) \lhd O_n(\mathbb{R})$, können wir den derart

konstruierten Weg einfach ßurückkonjugierenünd der Wegzusammenhang ist nachgewiesen.
Zuletzt gilt $O_n(\mathbb{R})^0 \subseteq SO_n(\mathbb{R})$, d.h. es liegen keine Matrizen mit Determinante -1 in $O_n(\mathbb{R})^0$. Wäre dem nämlich so, so wäre Kraft der Determinantenabbildung $\{-1, 1\}$ in $\mathbb{R}$ eine zusammenhängende Menge (denn stetige Bilder zusammenhängender Mengen bleiben zusammenhängend), was ersichtlich nicht zutrifft.

$\blacksquare$

Diese Erkenntnisse verwendet Baues, um eine entsprechende Aussage für $GL_n(\mathbb{R})$ nachzuweisen:

Satz (1.13): $GL_n(\mathbb{R})^0 = GL_n^+(\mathbb{R})$

Beweis: Nach dem Vorbild des obigen Beweises zeigen wir, dass $GL_n^+(\mathbb{R})$ zusammenhängend ist, und dass $GL_n(\mathbb{R})^0$ nicht aus weiteren Elementen bestehen kann.
Sei also $g \in GL_n^+(\mathbb{R})$, so lässt sich g wie folgt auf übersichtliche Art und Weise darstellen: $g = kdm$ mit

$$k \in SO_n(\mathbb{R}), d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, m = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Zerlegung entspringt einer gut vertrauten Methode, dem Gram-Schmidt-Verfahren zur Orthonormalisierung einer Vektorraum-Basis. Eine solche Basis stellen die Spalten von g nämlich gerade dar. Die Orthogonalisierung des Gram-Schmidtverfahrens findet sich in der Matrik m^{-1} wieder, die Normalisierung in der Matrix d^{-1}: Für den ersten Vektor der neuen Basis wähle einfach den ersten Basisvektor (1. Spalte in m) und normiere auf 1 (entspricht λ_1), für den zweiten neuen Vektor wähle den ursprünglichen zweiten, subtrahiere den ersten geeignet skaliert (2. Spalte in m) und normiere (entspricht λ_2), für den dritten neuen Vektor wähle den dritten ursprünglichen Vektor, subtrahiere geeignet mit den ersten beiden usw.
Auf diese Weise wird $gm^{-1}d^{-1}$ eine Orthonormalmatrix mit Determinante 1, denn $\det(g) > 0$ nach Voraussetzung, $\det(m) = 1$ und auch $\det(d) > 0$ (d fasst ja die Normierungen zusammen).
Für einzelnen Teile der Zerlegung $g = kdm$ lassen sich nun leicht Wege zum Einselement begründen: Für k hält der vorige Satz hin, und für d und m ist der Wegzusammenhang jeweils ersichtlich in den Gruppen der Diagonalmatrizen bzw. der Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen, deren Diagonale aus Einsen besteht, sodass schließlich folgt $GL_n^+(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R})^0$.
Die umgekehrte Inklusion, d.h. der Umstand, dass $GL_n(\mathbb{R})^0$ nicht noch Matrizen mit negativer Determinante enthält, folgt wie im vorigen Satz aus der Stetigkeit der Determinantenabbildung; $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ist keine zusammenhängende Menge.

$\blacksquare$

Nach diesen hilfreichen Erkenntnissen über bekannte Matrizengruppen führt Baues schließlich die Hauptbegriffe seines Skriptes ein, zunächst die linearen Lie-Gruppen:

Definition (1.14): Eine *lineare Lie-Gruppe* ist eine abgeschlossene Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$.

Exemplare linearer Lie-Gruppen liegen uns also allerhand vor: Neben den bisherigen Matrizengruppen fallen etwa auch alle endlichen Matrizengruppen darunter. In Beispiel (1.15) verweist der Autor auf eine Einbettung $GL_n(\mathbb{C})$ in $GL_{2n}(\mathbb{R})$, die wir an dieser Stelle für den Fall $n = 2$ einmal ausführen wollen:

Sei $\varphi \in GL_2(\mathbb{C})$, wir wollen dem eine Abbildung $\Phi \in GL_4(\mathbb{R})$ zuordnen, was naheliegt aufgrund der Isomorphie $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Wie sollte Φ also einen Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ abbilden in einer auf $\mathbb{R}^4$ übertragenen Weise? Das naheliegenste ist sicherlich eine Trennung in Real- und Imaginärteil.

$$\Phi(v) = \begin{pmatrix} Re(\varphi(v)) \\ Im(\varphi(v)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Wie kann Φ nun aber als Matrix A aussehen? Dazu sollten wir eine Basis zuordnen, indem wir geeignete Vektoren aus $\mathbb{C}^2$ übertragen. Zunächst stellen wir also φ dar:

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 & a_4 + ib_4 \end{pmatrix} \text{ mit } a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

Nun ordnen wir einfachen Vektoren in $\mathbb{C}^2$ einer Basis in $\mathbb{R}^4$ zu:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Und nun lässt sich die Matrix A ermitteln: Beispielsweise bildet Φ den ersten Basisvektor wie folgt ab:

$$\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} Re(\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})) \\ Im(\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix}) \\ Im(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Führen wir dies für die anderen Vektoren fort, ergibt dieser Ansatz die Darstellungsmatrix A von Φ:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & -b_1 & -b_2 \\ a_3 & a_4 & -b_3 & -b_4 \\ b_1 & b_2 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_4 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

Und auf entsprechende Weise bilden wir die von Baues angedeutete Matrix J, welche der Multiplikation mit i entspricht:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sodann ist nur noch nachzuvollziehen, dass genau für die Matrizen, welche die Form von A haben, $JA = AJ$ gilt, was die Abgeschlossenheit begründet (entsprechend zu der Abgeschlossenheit von $O_n(\mathbb{R})$). Dass Matrizen dieser Form eine eigene Untergruppe bilden, ist durch die Einbettung aus dem komplexen Vektorraum heraus bereits klar.

- Die Multiplikation mit J von rechts wirkt folgendermaßen auf die vier 2×2-Blöcke B, C, D, E der Matrix:

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & -B \\ E & -D \end{pmatrix}$$

- Von links angewendet führt J hingegen zu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D & -E \\ B & C \end{pmatrix}$$

Und es sind ersichtlich genau Matrizen der Form von A, welche $B = E$ und $C = -D$ genügen.

Satz (1.16): $GL_n(\mathbb{C})$ ist eine zusammenhängende topologische Gruppe.

Beweis: Man erinnere sich lediglich an den Beweis von Satz (1.13): Das Gram-Schmidt-Verfahren und alles weitere funktioniert ebenfalls mit den komplexen Zahlen, wo außerdem die Trennung des zugrundeliegenden Zahlenbereichs durch die Determinantenabbildung entfällt.

■

Im Gegensatz zu den linearen Lie-Gruppen, die sich auf den spezifischen Körper der reellen Zahlen beziehen, sind die Lie-Algebren zunächst für beliebige Körper definiert. Es handelt sich um Vektorräume, die über eine Vektormultiplikation verfügen, welche gewissen Eigenschaften genügt:

Definition (1.17): Eine *Lie-Algebra* besteht aus einem Vektorraum V über einem Körper K und einer sogenannten *Lie-Klammer* (bzw. einem *Lie-Produkt*) $[.,.] : V \times V \to V$, für die gilt:

- $[.,.]$ ist bilinear
- $[x,x] = 0 \forall x \in V$ (äquivalent, falls $char(K) \neq 2$: [x,y] = -[y,x] (Bemerkung (1.8)))
- Die Jacobi-Identität: $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \ \forall x,y,z \in V$

Bemerkung (1.19) verweist auf sogenannte *Strukturkonstanten* einer Lie-Klammer, d.h. Linearkombinationen aus Basiselementen, mit denen sich die Lie-Klammer wie von multilinearen Abbildungen gewohnt beschreiben lässt.

Beispiel (1.20) stellt eine gängige, wichtige Lie-Klammer vor, die für lineare Abbildungen und allgemein für assoziative Abbildungen funktioniert:

Seien $A, B \in Mat_n((K))$, dann definiert folgender Ausdruck eine Lie-Klammer:

$$[A,B] = AB - BA$$

Bilinearität und $[A,A] = 0_M$ sind unmittelbar ersichtlich, die Jacobi-Identität erklärt sich durch Nachrechnen, wie es simpler nicht sein könnte.
Nachdem wir nun immerhin ein nichttriviales Beispiel vor Augen haben, fährt der Autor mit den angepassten Begriffen von Unterräumen und verträglichen Abbildungen fort:

Definition (1.21): Sei $g = (V, [.,.])$ eine Lie-Algebra.

- Ein Untervektorraum U mit '$x, y \in U \Rightarrow [x,y] \in U$' heißt Unteralgebra von g.
- Gilt sogar '$x \in U, y \in V \Rightarrow [x,y] \in U$', so nennen wir U ein Ideal. Hiermit übertragen sich auch weitere bekannte Strukturen, z.B. lassen sich Quotienten-Lie-Algebren definieren, ganz so, wie es immer funktioniert (Lemma (1.24)).
- Mit beliebigen Teilmengen $M_1, M_2 \subseteq U$ lässt sich eine Unteralgebra erzeugen, nämlich so:
  $[M_1, M_2] := \langle\{[x,y] | x \in M_1, y \in M_2\}\rangle$.
- g heiße einfach, wenn g bis auf $\{0\}$ und g selbst keine Ideale enthält und außerdem nicht abelsch ist (Bemerke: Für $char(K) \neq 2$ bedeutet abelsch unmittelbar, dass $[x,y] = 0 \forall x,y \in V$ gilt).

Definition (1.22): Seien $g = (V, [.,.]_g)$ und $h = (W, [.,.]_h)$ zwei Lie-Algebren.

- Ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$, welche mit den Lie-Klammern vertauscht, d.h. es gilt $\varphi([x,y]_g) = [\varphi(x), \varphi(y)]_h$.

- Eine Derivation von g ist eine lineare Abbildung $D : V \to V$ mit

$$D([x,y]_g) = [D(x), y]_g + [x, D(y)]_g \forall x, y \in U$$

  Beachte: Baues spricht hier von Endomorphismen und meint dabei tatsächlich nur Endomorphismen auf Vektorräumen, nicht auf Lie-Algebren! Aufgrunddessen hat sich in der nachfolgenden Definition des Skriptes ein Missverständnis eingeschlichen!

Definition (1.23): Sowohl für einen Vektorraum V als auch für eine Lie-Algebra $g = (V, [.,.])$ nenne

$$gl(V) = gl(g) := \{\varphi : V \to V | \varphi \text{ ist linear}\}$$

Statten wir diesen Vektorraum mit der Lie-Klammer $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - \psi\varphi$ aus, sprechen wir von der Endomorphismen-Lie-Algebra von V.
Unabhängig davon definiere nun die Menge der Endomorphismen von Lie-Algebren

$$End(g) = \{\varphi \in gl(g) | \varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \forall x, y \in V\}$$

mit der Untermenge $Aut(g) = \{\varphi \in End(g) | \varphi \text{ ist invertierbar}\}$. $Der(g)$ bezeichne die Menge der Derivationen auf g.

- $End(g)$ und $Der(g)$ liegen beide in $gl(g)$ und sind Lie-Algebren*, aber nicht unbedingt Gruppen.

- $Aut(g)$ ist eine Gruppe, aber keine Lie-Algebra, denn offenbar ist $[A, A] = 0 \notin Aut(g)$.

*Wir präsentieren an dieser Stelle die eher zähe Gleichungskette, welche prüft, dass '$D_1, D_2 \in Der(g) \Rightarrow [D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$' gilt. Seien also $x, y \in V$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
(D_1D_2 - D_2D_1)([x,y]) &= D_1(D_2([x,y])) - D_2(D_1([x,y])) \\
&= D_1([D_2(x), y] + [x, D_2(y)]) - D_2([D_1(x), y] + [x, D_1(y)]) \\
&= D_1([D_2(x), y]) + D_1([x, D_2(y)]) - D_2([D_1(x), y]) - D_2([x, D_1(y)]) \\
&= [D_1(D_2(x)), y] + [D_2(x), D_1(y)] + [D_1(x), D_2(y)] + [x, D_1(D_2(y))] \\
&- [D_2(D_1(x)), y] - [D_1(x), D_2(y)] - [D_2(x), D_1(y)] - [x, D_2(D_1(y))] \\
&= [(D_1D_2 - D_2D_1)(x), y] + [x, (D_1D_2 - D_2D_1)(y)]
\end{aligned}$$

Die letzten beiden hier vorgestellten Beispiele wenden die soeben eingeführten Begriffe auf eine vertraute Abbildung an, nämlich die Spur-Abbildung:

Beispiel (1.25): $Spur : GL_n(K) \to K$ ist ein Endomorphismus von Lie-Algebren, wobei $GL_n(K)$ mit der Endomorphismen-Lie-Algebra ausgestattet ist und K zwangsläufig mit der trivialien Lie-Algebra. Denn da $Spur(AB) = Spur(BA)$ gilt, folgt $Spur([A, B]) = 0 \forall A, B \in GL_n(K)$.

Beispiel (1.26): $sl_n(K) := Kern(Spur)$ ist ein Ideal in $gl_n(K)$, denn für $A \in sl_n(K), B \in gl_n(K)$ gilt:

$$Spur(B^{-1}AB) = Spur((AB)B^{-1}) = Spur(A) = 0$$

(Bezüglich der Bezeichnung beachte man, dass $sl_n(K)$ hier zunächst rein gar nichts mit $SL_n(K)$ zu tun hat!)
Für $n \geq 2$ und $char(K) \neq 2$ ist $sl_n(K)$ sogar einfach. Diese Erkenntnis vertagt Baues allerdings bis in das vierte Kapitel des Skriptes hinein.
Hiermit endet der Inhalt des ersten Seminarvortrags; Der zweite beginnt bei Definition (1.27) und setzt die Wiedereinführung bekannter gruppentheoretischer Konzepte fort.