1 Lie-Gruppen

1.2 Lie-Algebren

Im letzten Vortrag haben wir bereits das Konzept der Lie-Algebren kennengelernt. Zunächst werde ich noch einige weitere grundlegende Definitionen dazu angeben.
In diesem Kapitel sei V ein Vektorraum und $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra.

Definition 1.27. Definiere die folgenden Ideale:

1. Das *Zentrum* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \ \forall x, y \in \mathfrak{g}\}$
2. Das *Kommutatorideal* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \langle [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g} \rangle$

Offensichtlich ist $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ abelsch.

Definition 1.28. Ist $\mathfrak{h}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, so ist der *Normalisator* von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ definiert als

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}.$$

Der Normalisator ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

Definition 1.29. Ein Homomorphismus von Lie-Algebren

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$$

heißt *Darstellung* von $\mathfrak{g}$.

Für uns ist vor allem die im folgenden Satz eingeführte Darstellung von Bedeutung.

Satz 1.30.

1. $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \ Y \mapsto [X, Y]$ ist eine Derivation.
2. $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{der}(\mathfrak{g}), \ X \mapsto \mathrm{ad}_X$ ist eine Darstellung, die *adjungierte Darstellung.*
3. $\ker(\mathrm{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

Beweis. Für den Beweis werden die folgenden Eigenschaften einer Lie-Algebra ausgenutzt ($X, Y, Z \in \mathfrak{g}$):

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \tag{1}$$

$$[X, Y] = -[Y, X] \tag{2}$$

$$[\cdot, \cdot] \text{ bilinear} \tag{3}$$

1. Es gilt die Produktregel für Derivationen:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_X([Y, Z]) = [X, [Y, Z]] &\overset{(1)}{=} -[Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]] \\ &\overset{(2),(3)}{=} [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] = [\mathrm{ad}_X(Y), Z] + [Y, \mathrm{ad}_X(Z)] \end{aligned}$$

2. Ich zeige nur, dass ad ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist.

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}([X,Y])(Z) = \mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z) = [[X,Y],Z] &\overset{(2)}{=} -[Z,[X,Y]] \\ &\overset{(1)}{=} [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] \overset{(2),(3)}{=} [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] \\ &= [X,\mathrm{ad}_Y(Z)] - [Y,\mathrm{ad}_x(Z)] = \mathrm{ad}_X(\mathrm{ad}_Y(Z)) - \mathrm{ad}_Y(\mathrm{ad}_X(Z)) \\ &= [\mathrm{ad}_X,\mathrm{ad}_Y](Z) = [\mathrm{ad}(X),\mathrm{ad}(Y)](Z)\end{aligned}$$

3. $X \in \ker(\mathrm{ad}) \Leftrightarrow \mathrm{ad}_X \equiv 0 \Leftrightarrow \forall Y \in \mathfrak{g}: \;\; [X,Y] = 0 \Leftrightarrow X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

■

1.2.1 Die Exponentialabbildung

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften der Exponentialabbildung für Matrizen erarbeitet. Das Konzept ist eine Verallgemeinerung der uns bekannten Exponentialabbildung in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Viele der Eigenschaften sind eher analytischer Natur, sind aber notwendig, um im nächsten Kapitel die Lie-Algebra einer linearen Lie-Gruppe zu definieren.

Definition 1.32. Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ heißt

$$\exp : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \;\; A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Exponentialabbildung.

Bemerkung. Für uns ist exp nur dann interessant, wenn die obige Reihe konvergiert. Dies ist aber tatsächlich für jede Matrix A der Fall: Für $\|A\|^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$ ist $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$, $\exp(A)$ ist also normkonvergent.

Das folgende technische Lemma wird benötigt, um Eigenschaften der Exponentialabbildung beweisen zu können.

Lemma 1.33. Die Menge der über $\mathbb{C}$ diagonalisierbaren (*halbeinfachen*) Matrizen liegt dicht in $\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Beweis. (*Skizze*) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit $A = T^{-1}JT$, wobei J die jordansche Normalform bezeichne. Auf der Diagonalen der Matrix J stehen die (nicht notwendig paarweise verschiedenen) Eigenwerte von A:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Falls nun zwei Eigenwerte übereinstimmen, also $\lambda_i = \lambda_j$ für $i < j$ gilt, setze $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \epsilon_i$ für ein kleines ϵ_i. Ansonsten sei $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$. Es ergibt sich die leicht verschobene Matrix

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

mit paarweise verschiedenen Diagonalelementen. Die Matrix $T^{-1}\tilde{J}T$ ist diagonalisierbar, da es eine Basis aus Eigenvektoren gibt und liegt in einer kleinen Umgebung von $A = T^{-1}JT$. ■

Folgende hilfreiche Eigenschaften der Exponentialabbildung sind bekannt:

Lemma 1.34. Für $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}), g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

1. $\exp(0) = I_n$
2. $\exp((\alpha + \beta)A) = \exp(\alpha A)\exp(\beta A)$
3. $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$, falls $AB = BA$
4. $\exp(gAg^{-1}) = g\exp(A)g^{-1}$
5. $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Spur}(A)}$

Bemerkung. Aus der letzten Eigenschaft ergibt sich die Tatsache, dass exp tatsächlich nach $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ abbildet, denn die Determinante von $\exp(A)$ ist immer eine positive Zahl, insbesondere ungleich Null.

Beweis. Alle Aussagen sind durch Einsetzen in die Potenzreihe und leichte Rechnungen nachvollziehbar. Ich zeige lediglich die letzte Behauptung.

- Sei zunächst $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix. Einsetzen in die Definition ergibt dann $\exp(A) = \mathrm{diag}(\exp(\lambda_1), ..., \exp(\lambda_n))$, also $\det(\exp(A)) = \exp(\lambda_1)\cdots\exp(\lambda_n) = e^{\mathrm{Spur}(A)}$.
- Sei nun $B = gAg^{-1}$ diagonalisierbar. Mit Eigenschaft 4. folgt $\exp(B) = g\exp(A)g^{-1}$ und somit $\det(\exp(B)) = \det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Spur}(A)} = e^{\mathrm{Spur}(B)}$.
- Da die diagonalisierbaren Matrizen dicht in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ liegen, gilt die Aussage für jedes $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

■

Definition 1.35. Sei G eine topologische Gruppe. Ein Homomorphismus von topologischen Gruppen (also ein stetiger Gruppenhomomorphismus)

$$c : (\mathbb{R}, +) \to G$$

heißt *Einparameter-(Unter-)gruppe.*

Wichtig ist vor allem die folgende Einparametergruppe, die später benutzt wird, um die Lie-Algebra einer linearen Lie-Gruppe zu definieren.

Beispiel 1.36. Für $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ liefert

$$c_A : (\mathbb{R}, +) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ t \mapsto \exp(tA)$$

eine Einparametergruppe.

Satz 1.37. Sei $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ und c_X die im Beispiel definierte Abbildung. Dann gelten

1. c_X ist differenzierbar mit $c_X(0) = I_n,\ c'_X(0) = X$.
2. exp ist eine analytische Funktion (d.h. es gibt eine Potenzreihe, die lokal gegen exp konvergiert; bereits gezeigt) mit $\mathrm{d}\exp\big|_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})}$.

Wir möchten nun eine Umkehrabbildung für exp definieren. Dafür betrachten wir die zum reellen oder komplexen Logarithmus analoge Potenzreihendarstellung des Matrixlogarithmus.

Definition 1.38. Für $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ heißt

$$\log(A) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(A - I_n)^k}{k}$$

Logarithmusreihe.

Um den Logarithmus sinnvoll nutzen zu können benötigen wir Konvergenz:

Lemma 1.39.
1. Für $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $\|A - I_n\| < 1$ ist $\log(A)$ konvergent und es gilt $\exp(\log(A)) = A$.
2. Für $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit $\|A\| < 1$ ist $\|\exp(A) - I_n\| < 1$ und es gilt $\log(\exp(A)) = A$.

1.2.2 Die Lie-Algebra einer linearen Lie-Gruppe

Mithilfe der Matrixexponentialabbildung wird in diesem Kapitel die Lia-Algebra einer linearen Lie-Gruppe definiert. Diese bildet eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})(= \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}))$.

Definition 1.40. Sei G eine lineare Lie-Gruppe (das ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$).

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{Lie}(G) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \exp(tA) \in G\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

heißt *Lie-Algebra der linearen Lie-Gruppe G.*

Um zu zeigen, dass $\mathfrak{g}$ eine Unteralgebra ist, wird das folgende Lemma benötigt.

Lemma 1.41. Sei G eine lineare Lie-Gruppe, $\mathfrak{g}$ die zugehörige Lie-Algebra, $X, Y \in \mathfrak{g}$, $A \in G$. Es gilt

1. $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$
2. $\exp(X+Y) = \lim\limits_{m\to\infty}(\exp(\frac{X}{m})\exp(\frac{Y}{m}))^m$ *(Formel von Lie)*
3. Für die Einparametergruppe $\tilde{c}(t) = \exp(-tY)X\exp(tY)$ gilt $\frac{\mathrm{d}\tilde{c}}{\mathrm{d}t}(0) = [X, Y]$.

Satz 1.42. Die Lie-Algebra $\mathfrak{Lie}(G)$ der linearen Lie-Gruppe G ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

Beweis. Seien $X, Y \in \mathfrak{Lie}(G)$. Zu zeigen ist, dass $X + Y \in G$ ($\mathfrak{Lie}(G)$ Untervektorraum) und $[X, Y] \in \mathfrak{Lie}(G)$. Ich benutze das obige Lemma.

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$. Es gilt $\exp(t(X+Y)) \stackrel{2.}{=} \lim\limits_{m\to\infty}(\exp(\frac{tX}{m})\exp(\frac{tY}{m}))^m$. Da $X, Y \in \mathfrak{Lie}(G)$, gilt $\exp(\frac{tX}{m}), \exp(\frac{tY}{m}) \in G$. Per Definition ist G abgeschlossen, also gilt bereits $\exp(t(X+Y)) \in G$, bzw. $X + Y \in \mathfrak{Lie}(G)$.

(b) Sei $\tilde{c}(t) = \exp(-tY)X\exp(tY)$. Mit 3. folgt

$$[X, Y] = \frac{\mathrm{d}\tilde{c}}{\mathrm{d}t}(0) \stackrel{Def.}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\tilde{c}(t) - \tilde{c}(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\tilde{c}(t) - X}{t}.$$

Nun gilt $\frac{X}{t} \in \mathfrak{Lie}(G)$ und mit 1. auch $\frac{\tilde{c}(t)}{t} \in \mathfrak{Lie}(G)$. Wie bereits gezeigt ist $\mathfrak{Lie}(G)$ ein Untervektorraum und als solcher abgeschlossen. Es folgt, dass die Differenz und deren Grenzwert in $\mathfrak{Lie}(G)$ liegen, das heißt $[X, Y] \in \mathfrak{Lie}(G)$.

∎

Zum Schluss wird der Begriff der Lie-Algebra einer linearen Lie-Gruppe noch anhand von zwei Beispielen konkretisiert.

Beispiel 1.43. 1. Betrachte die *spezielle lineare Gruppe* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$. Die Lie-Algebra dieser Gruppe ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) &= \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \det(\exp(tA)) = 1\ \forall t \in \mathbb{R}\}\\ &= \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Spur}(A) = 0\}\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich dabei durch Ableiten: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(\exp(tA))\big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(\mathrm{Spur}(tA))\big|_{t=0} = \exp(\mathrm{Spur}(tA))\cdot\mathrm{Spur}(A)\big|_{t=0} = \mathrm{Spur}(A)$.

2. $H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{GL}_3$ heißt *Heisenberg-Gruppe.*

Deren Lie-Algebra hat die Gestalt $\mathfrak{h}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Beweis. (a) Sei $A \in \mathfrak{h}_3,\ t \in \mathbb{R}$. Per Definition der Exponentialabbildung gilt

$$\exp(tA) = I_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & ta & tb \\ 0 & 0 & tc \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=tA} + \frac{(tA)^2}{2} + \frac{(tA)^3}{6} + ...$$

und mit $(tA)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & tatc \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(tA)^3 = (tA)^4 = ... = 0$ folgt $\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & ta & tb + \frac{t^2ac}{2} \\ 0 & 1 & tc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_3$.

(b) Sei nun $X \in H_3$ mit $\exp(tX) \in H_3$. Um zu zeigen, dass X dann schon in der Lie-Algebra $\mathfrak{h}_3$ liegen muss, nutzen wir den Logarithmus als Umkehrfunktion. Zunächst erzwingen wir die notwendige Konvergenz durch Wahl eines kleinen $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, sodass $\|\exp(tX) - I_3\| < 1$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} tX = \log(\exp(tX)) &= \log \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:B} \\ &= (B - I_3) - \frac{(B - I_3)^2}{2} + \underbrace{\frac{(B - I_3)^3}{3}}_{=0} + ... \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta - \frac{\alpha\gamma}{2} \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und es folgt $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta}{t} - \frac{\alpha\gamma}{2t} \\ 0 & 0 & \frac{\gamma}{t} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}_3$.

■