Proendliche Galoisgruppen - Teil 1

Da ich meinen Vortrag über Proendliche Galoisgruppen zeitlich nicht komplett beenden konnte, folgt hier nun dessen Vervollständigung. Der Stoff wird *für den folgenden Vortrag benötigt*, daher habe ich die wichtigsten Resultate noch einmal zusammengefasst.

Die Beweise, die bereits vollständig in meinem Vortrag präsentiert wurden, habe ich nicht noch einmal aufgeschrieben.

Sei $L|K$ eine (nicht notwendig endliche) Galoiserweiterung. Sei $(L_i)_{i\in I}$ die Familie aller Zwischenkörper, die endlich und Galois'sch über K sind. Seien

$$f_i : \mathrm{Gal}(L|K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(L_i|K), \quad \sigma \mapsto \sigma|_{L_i}$$

für $i \in I$ die Restriktionshomomorphismen. Mithilfe des folgenden Lemmas können wir auf $\mathrm{Gal}(L|K)$ eine Topologie definieren.

Lemma. *Es gelten die folgenden Aussagen.*

(i) $L = \bigcup_{i\in I} L_i$.

(ii) Die Abbildung

$$\iota : \mathrm{Gal}(L|K) \hookrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Gal}(L_i|K), \; \sigma \mapsto (\sigma_{L_i})_{i\in I}$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus mit

$$\mathrm{Bild}(\iota) = \big\{(\sigma_i)_{i\in I} : L_j \subset L_k \Rightarrow \sigma_k|_{L_j} = \sigma_j\big\}.$$

Definition. Auf der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|K)$ definieren wir nun folgendermaßen eine Topologie. Wir versehen

- $\mathrm{Gal}(L_i|K)$ für jedes $i \in I$ mit der diskreten Topologie,
- $\prod_{i\in I} \mathrm{Gal}(L_i|K)$ mit der Produkttopologie und
- $\mathrm{Gal}(L|K) \hookrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Gal}(L_i|K)$ mit der Unterraumtopologie.

Lemma. *Das Mengensystem*

$$\mathcal{B} := \big\{f_i^{-1} f_i(\sigma) : i \in I, \sigma \in \mathrm{Gal}(L|K)\big\} = \big\{f_i^{-1}(\sigma_i) : i \in I, \sigma_i \in \mathrm{Gal}(L_i|K)\big\}$$

ist eine Basis der Topologie auf $\mathrm{Gal}(L|K)$.

Wir verwenden dies zunächst, um einige Eigenschaften des topologischen Raumes $\mathrm{Gal}(L|K)$ zu zeigen.

Satz. $\mathrm{Gal}(L|K)$ *ist eine topologische Gruppe.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für $G := \mathrm{Gal}(K|L)$ die Verknüpfung

$$g : G \times G \longrightarrow G, \quad (\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau$$

und die Inversenbildung

$$h : G \longrightarrow G, \quad \sigma \mapsto \sigma^{-1}$$

stetig sind.

Zeige zuerst die Stetigkeit von h. Sei $\sigma \in G$ und sei $\sigma^{-1} \subset U \subset G$ eine Umgebung. Dann gibt es $i \in I$ mit $f_i^{-1} f_i(\sigma^{-1}) \subset U$, nach dem vorigen Lemma. Setze $V := f_i^{-1} f_i(\sigma)$ und zeige, dass $h(V) \subset U$ gilt. Sei dazu $\rho \in V$ also $h(\rho) \in h(V)$. Dann ist $\rho|_{L_i} = \sigma|_{L_i}$ und damit auch $\rho^{-1}|_{L_i} = \sigma^{-1}|_{L_i}$, also $h(\rho) = \rho^{-1} \in f_i^{-1} f_i(\sigma^{-1}) \subset U$. Damit ist h stetig in σ.

Zeige nun die Stetigkeit von g. Sei also $(\sigma, \tau) \in G \times G$ und sei $\sigma\tau \in U \subset G$ eine Umgebung. Dann gibt es wieder ein $i \in I$ mit $f_i^{-1} f_i(\sigma\tau) \subset U$, nach obigem Lemma. Setze nun $V_1 := f_i^{-1} f_i(\sigma)$ und $V_2 := f_i^{-1} f_i(\tau)$. Dann ist $(\sigma, \tau) \in V_1 \times V_2 \subset G \times G$ eine Umgebung und wir zeigen, dass $g(V_1 \times V_2) \subset U$ ist. Sei dazu $(\sigma', \tau') \in V_1 \times V_2$, also $g(\sigma, \tau) \in g(V_1 \times V_2)$. Dann folgt $\sigma'|_{L_i} = \sigma|_{L_i}$ und $\tau'|_{L_i} = \tau|_{L_i}$, also auch $\sigma'\tau'|_{L_i} = \sigma\tau|_{L_i}$. Damit ist dann $g(\sigma', \tau') = \sigma'\tau' \in f_i^{-1} f_i(\sigma\tau) \subset U$. Also ist g stetig in (σ, τ). □

Satz. $\mathrm{Gal}(L|K)$ *ist kompakt.*

Beweis. $\mathrm{Gal}(L_i|K)$ ist für jedes $i \in I$ kompakt, da endliche Hausdorffräume immer kompakt sind. Nach dem Satz von Tychonoff ist damit auch das Produkt $\prod_{i \in I} \mathrm{Gal}(L_i|K)$ kompakt. Es bleibt daher zu zeigen, dass $\mathrm{Gal}(L|K) \subset \prod_{i \in I} \mathrm{Gal}(L_i|K)$ abgeschlossen ist. Dazu zeigen wir, dass dessen Komplement offen ist. Sei also

$$(\sigma_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathrm{Gal}(L_i|K) \setminus \mathrm{Gal}(L|K),$$

d.h. es gibt $j, j' \in I$ mit $L_j \subset L_{j'}$ und $\sigma_{j'}|_{L_j} \neq \sigma_j$. Betrachte dazu

$$\begin{aligned} U &:= \left\{ (\rho_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathrm{Gal}(L_i|K) : \rho_j = \sigma_j, \rho_{j'} = \sigma_{j'} \right\} \\ &= \left\{ \sigma_j \right\} \times \left\{ \sigma_{j'} \right\} \times \prod_{i \in I \setminus \{j, j'\}} \mathrm{Gal}(L_i|K). \end{aligned}$$

Dann ist $U \subset \prod_{i \in I} \mathrm{Gal}(L_i|K) \setminus \mathrm{Gal}(L|K)$ und nach Definition der Produkttopologie ist U eine offene Umgebung von $(\sigma_i)_{i \in I}$ in $\prod_{i \in I} \mathrm{Gal}(L_i|K)$. □

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts, das den Hauptsatz der Galoistheorie auf nicht-endliche Galoiserweiterungen verallgemeinert. Der Beweis konnte im Vortrag nur zur Hälfte beendet werden, daher hier noch einmal der vollständige Beweis.

Theorem. *Die Zuordnungen*

$$\begin{aligned} \left\{ \textit{abgeschlossene Untergruppen von } \mathrm{Gal}(L|K) \right\} &\xrightarrow{\Phi} \left\{ \textit{Zwischenkörper von } L|K \right\} \\ H &\longmapsto L^H \\ \mathrm{Gal}(L|E) &\longleftarrow\!\shortmid \ E \end{aligned}$$

sind bijektiv und invers zueinander.

Beweis. Da wir die Bijektivität von Φ an dieser Stelle noch nicht nachgewiesen haben, bezeichnen wir die Abbildung $\operatorname{Gal}(L|E) \longleftarrow E$ zunächst mit Ψ. Es ist also $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ und $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$ zu zeigen, wozu wir unter anderem den Hauptsatz der Galoistheorie für endliche Galoiserweiterungen verwenden werden. In dessen Beweis wurde bereits gezeigt, dass $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ gilt, wenn man im Definitionsbereich von Φ alle Untergruppen von $\operatorname{Gal}(L|K)$ zulässt, da dort die Endlichkeit der Galoiserweiterung $L|K$ nicht verwendet wird. Es bleiben daher die folgenden beiden Aussagen zu zeigen.

(i) Für jeden Zwischenkörper E von $L|K$ ist $\operatorname{Gal}(L|E)$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\operatorname{Gal}(L|K)$.

(ii) $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$.

Beides erhält man als direkte Konsequenz aus dem folgenden Satz. □

Satz. *Sei $H \subset \operatorname{Gal}(L|K)$ eine Untergruppe. Dann ist*

$$\operatorname{Gal}(L|L^H) = \overline{H}$$

als Abschluss in $\operatorname{Gal}(L|K)$.

Beweis. Setze $H_i := f_i(H)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\overline{H} &= \left\{\sigma \in \operatorname{Gal}(L|K) : f_i^{-1} f_i(\sigma) \cap H \neq \emptyset \ \forall i \in I\right\} \\ &= \left\{\sigma \in \operatorname{Gal}(L|K) : f_i(\sigma) \in H_i \ \forall i \in I\right\} \\ &= \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(H_i).\end{aligned}$$

Es ist also $\operatorname{Gal}(L|L^H) = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(H_i)$ zu zeigen. Dazu zeige zunächst

$$L^H = \bigcup_{i\in I} L_i^{H_i}. \tag{1}$$

Es gilt für jedes $x \in L_i$

$$\begin{aligned} x \in L^H &\iff \sigma(x) = x \ \forall \sigma \in H \\ &\iff \sigma|_{L_i}(x) = x \ \forall \sigma \in H \\ &\iff \sigma_i(x) = x \ \forall \sigma_i \in H_i \\ &\iff x \in L_i^{H_i}.\end{aligned}$$

Damit ist $L_i \cap L^H = L_i^{H_i}$ für alle $i \in I$ gezeigt und es folgt

$$\bigcup_{i\in I} L_i^{H_i} = \bigcup_{i\in I} (L_i \cap L^H) = L^H \cap \bigcup_{i\in I} L_i = L^H,$$

womit (1) nachgewiesen ist.

Betrachten wir nun neben H noch eine weitere Untergruppe $H' \subset \mathrm{Gal}(L|K)$ und setzen ebenfalls $H'_i := f_i(H')$, so gilt

$$L^H = L^{H'} \iff H_i = H'_i \; \forall i \in I. \tag{2}$$

Um die eine Richtung dieser Äquivalenz zu zeigen, verwenden wir Gleichung (1) und für die andere Richtung den Hauptsatz der Galoistheorie. Aus $H_i = H'_i \; \forall i$ folgt $L_i^{H_i} = L_i^{H'_i} \; \forall i$, also $\bigcup_{i \in I} L_i^{H_i} = \bigcup_{i \in I} L_i^{H'_i}$ und mit Gleichung (1) dann $L^H = L^{H'}$. Setzt man umgekehrt $L^H = L^{H'}$ voraus, so folgt $L_i^{H_i} = L_i \cap L^H = L_i \cap L^{H'} = L_i^{H'_i} \; \forall i$ und mit dem Hauptsatz der Galoistheorie schließlich $H_i = H'_i \; \forall i$. Also ist die Gültigkeit von (2) gezeigt.

Zum Abschluss des Beweises betrachten wir für eine beliebige Untergruppe $H' \subset \mathrm{Gal}(L|K)$ die Bedingung

$$f_i(H') = H_i \; \forall i \in I \tag{3}$$

und zeigen, dass sowohl

- $H' = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(H_i)$, als auch
- $H' = \mathrm{Gal}(L|L^H)$

die größte Untergruppe von $\mathrm{Gal}(L|K)$ ist, die die Bedingung (3) erfüllt.

Setze zuerst $H' := \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(H_i)$. Dann ist H' als Schnitt von Untergruppen eine Untergruppe von $\mathrm{Gal}(L|K)$. Wegen

$$f_j(H') = f_j(\bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(H_i)) \subset f_j(f_j^{-1}(H_j)) = H_j \quad \forall j \in I$$

erfüllt H' eine Inklusion von (3). Für die andere Inklusion wähle zu $\sigma_j \in H_j$ ein $\rho \in f_j^{-1}(\sigma_j)$ (Beachte: f_j ist surjektiv). Dann ist $\rho \in f_i^{-1}(H_i) \; \forall i$, also $\rho \in \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(H_i)$ und damit

$$\sigma_j = f_j(\rho) \in f_j(\bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(H_i)) = f_j(H'),$$

womit auch die andere Inklusion von (3) erfüllt ist. Ist $H'' \subset \mathrm{Gal}(L|K)$ eine weitere Untergruppe, die (3) erfüllt, so folgt $H'' \subset f_i^{-1} f_i(H') = f_i^{-1}(H_i) \; \forall i \in I$, also $H'' \subset \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(H_i)$. Damit ist H' die größte Untergruppe von $\mathrm{Gal}(L|K)$, die (3) erfüllt.

Setze nun $H' := \mathrm{Gal}(L|L^H)$. Nach (2) ist Bedingung (3) äquivalent zu

$$L^H = L^{H'}. \tag{4}$$

Wir wissen bereits, dass $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ gilt, wenn man im Definitionsbereich von Φ alle Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L|K)$ zulässt. Damit sieht man, dass $H' = \mathrm{Gal}(L|L^H)$ die Bedingung (4) erfüllt, denn

$$L^{H'} = \Phi(\mathrm{Gal}(L|L^H)) = \Phi(\Psi(L^H)) = L^H.$$

Ist $H'' \subset \mathrm{Gal}(L|K)$ eine weitere Untergruppe, die (4) erfüllt, so ist $H'' \subset \mathrm{Gal}(L|L^{H''}) = \mathrm{Gal}(L|L^H) = H'$. Damit ist H' die größte Untergruppe von $\mathrm{Gal}(L|K)$, die (4) erfüllt.

Insgesamt ist also

$$\mathrm{Gal}(L|L^H) = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(H_i) = \overline{H}$$

gezeigt. $\square$