Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe 1.06. Besprechung: 7.06 und 8.06

Lineare Algebra II
Übungsblatt 7

Aufgabe 1. [9 P.]
Finden Sie das Minimalpolynom $m_A(X)$ für die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A sind kleine natürliche Zahlen. Benutzen Sie Satz 5.2.3 (c) des Kurzskripts.

Aufgabe 2. Sei A eine Block-Diagonalmatrix, die aus zwei quadratischen Matrizen A_1, A_2 gebaut ist: [9 P.]

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie:

$$m_A(x) = \mathbf{kgV}\,\{m_{A_1}(x),\ m_{A_2}(x)\}.$$

Hinweis. Das Beispiel auf Seite 25 des Skripts darf nicht ohne Beweis angewandt werden.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbf{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ genau dann nilpotent ist, wenn alle ihre Eigenwerte gleich 0 sind. [9 P.]

Hinweis. Für die Richtung "$\Leftarrow$" benutzen Sie den Satz 5.1.1 von Cayley-Hamilton. Für die Richtung "$\Rightarrow$" darf der Satz 5.3.1 nicht benutzt werden.

Aufgabe 4. Sei $\{0\} \neq U$ ein K-Vektorraum mit $\dim U = n < \infty$. Sei $\theta : U \to U$ ein beliebiger Endomorphismus und sei $\psi : U \to U$ ein nilpotenter Endomorphismus, d.h. es gilt $\psi^k = \mathbf{0}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen voraus, dass k minimal mit dieser Eigenschaft ist. [2×4+5 P.]

(a) Beweisen Sie, dass $\theta^{\ell+1}(U)$ ein Untervektorraum von $\theta^{\ell}(U)$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ ist.

(b) Nach (a) können wir die folgende Kette von Untervektorräumen betrachten:

$$U \supseteq \psi(U) \supseteq \psi^2(U) \supseteq \cdots \supseteq \psi^k(U) = \{0_U\}.$$

Beweisen Sie, dass jeder nächste Untervektorraum in dieser Kette strikt kleiner ist als der vorherige:

$$U \supsetneqq \psi(U) \supsetneqq \psi^2(U) \supsetneqq \cdots \supsetneqq \psi^k(U) = \{0_U\}.$$

Leiten Sie daraus ab, dass $k \leqslant n$ ist.

Fortsetzung Seite 2.

(c) Nach dem Ergänzungssatz existiert eine Basis $v = (v_1, \ldots, v_n)$ von U und ein $t \geqslant 2$, so dass $(v_t, v_{t+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von $\psi(U)$ ist.

Berechnen Sie die ersten $(t-1)$ Zeilen der Darstellungsmatrix $[\psi]_v^v$.

(d) Beweisen Sie, dass es eine Basis v von U gibt, so dass die Darstellungsmatrix $[\psi]_v^v$ eine untere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonale ist:

$$[\psi]_v^v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & \ldots & * & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Überprüfen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nilpotent ist. Für den Endomorphismus

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \;\; \psi(X) = AX,$$

finden Sie eine Basis v von $\mathbb{R}^3$, so dass $[\psi]_v^v$ die Form wie in (d) hat.