Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe 25.05 Besprechung: 31.05 und 1.06

Lineare Algebra II

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Beweisen Sie: [2 P.]

Sei $A \in \mathbf{Mat}(n,n,K)$ eine hermitesche Matrix und seien δ_k, $k = 1,\ldots,n$, ihre führenden Hauptminoren. Die Matrix A ist negativ definit genau dann, wenn $\delta_i < 0$ für alle ungeraden i und $\delta_i > 0$ für alle geraden i gilt.

Aufgabe 2. [4+4 P.]

Wir betrachten die quadratische Form $q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie eine Diagonalmatrix D mit Diagonalelementen aus der Menge $\{1,-1,0\}$, so dass $q_A \sim q_D$ gilt.

(b) Finden Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, so dass $q_A(SX) = q_D(X)$ für alle $X \in \mathbb{R}^3$ ist.

Hinweis. Lesen Sie Lemma 4.2.4 und den Beweis des Satzes 4.2.5 im Kurzskript.

Aufgabe 3. [4×4 P.]

(1) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(n,n,K)$$

berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(x) = \det(xE_n - A)$.

(2) Für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zerlegen Sie das Polynom $\chi_B(x)$ in ein Produkt von zwei <u>teilerfremden</u> Polynomen $\chi_B(x) = p_1(x)p_2(x)$ mit $\mathrm{Grad}(p_1(x)) = 1$ und $\mathrm{Grad}(p_2(x)) = 2$.

(3) Finden Sie Basen von Untervektorräumen $\mathrm{Ker}(p_1(B))$ und $\mathrm{Ker}(p_2(B))$.

(4) Überprüfen Sie (ohne Satz 5.1.2):

$$\mathrm{Ker}(p_1(B)) \oplus \mathrm{Ker}(p_2(B)) = \mathbb{R}^3.$$

Fortsetzung Seite 2.

Für $A \in K^n$ heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} L_A : \quad & K^n \to K, \\ & X \to X^t \cdot A \end{aligned}$$

lineare Form mit Koeffizienten A. Die folgende Aufgabe beantwortet teilweise die Frage, wann eine quadratische Form ein Produkt von zwei linearen Formen ist.

Aufgabe 4. [(3×4)+2 P.]

(a) Seien $P, Q \in \mathbf{Mat}(n, m, K)$. Beweisen Sie:

$$\text{Rang}(P + Q) \leqslant \text{Rang}(P) + \text{Rang}(Q).$$

(b) Seien $B, C \in K^n$. Beweisen Sie:

$$\text{Rang}(BC^t + CB^t) \leqslant 2.$$

(c) Sei K ein Körper mit $\text{Char}(K) \neq 2$. Seien $B, C \in K^n$ und sei $A \in \mathbf{Mat}(n, n, K)$ symmetrisch. Beweisen Sie: Wenn

$$q_A(X) = L_B(X) \cdot L_C(X)$$

für alle $X \in K^n$ gilt, dann gilt

$$\text{Rang}(A) \leqslant 2.$$

(d) Ist die quadratische Form $x_1^2 + x_2^2$ ein Produkt von zwei reellen linearen Formen?