Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe: 18.05. Besprechung: 24.05 und 25.05

Lineare Algebra II

Übungsblatt 5

- Sei p eine Primzahl. In LA I haben wir bewiesen, dass die Menge $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ mit der Multiplikation und Addition modulo p ein Körper ist. Dieser Körper wird mit $\mathbb{F}_p$ bezeichnet.

  Satz.

  (a) Für jeden endlichen Körper K existieren eine Primzahl p und eine natürliche Zahl n, so dass $|K| = p^n$ ist.

  (b) Für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl n existiert genau ein (bis auf Isomorphie) Körper K mit p^n Elementen.

- Lesen Sie Abschnitte 4.1 und 4.2 des Kurzskipts.

Aufgabe 1. Sei K ein endlicher Körper. [3+3+3P.]

(a) Beweisen Sie, dass es genau $|K|^{n^2}$ Bilinearformen auf dem Vektorraum $V = K^n$ gibt.

(b) Geben Sie ein Beispiel von zwei verschiedenen symmetrischen Bilinearformen β und β' auf $V = (\mathbb{F}_2)^2$, die die gleichen assoziierten quadartischen Formen q_β und $q_{\beta'}$ haben.

(c) Beweisen Sie, dass es nur 4 quadratische Formen auf $V = (\mathbb{F}_2)^2$ gibt, die mit einer symmetrischen Bilinearform auf V assoziiert sind. Listen Sie sie.

Aufgabe 2. [5+5P.]

(a) Überprüfen Sie, ob die quadratischen Formen $2x_1x_2$ und $x_1^2+x_2^2$ auf dem Vektorraum $(\mathbb{F}_3)^2$ äquivalent sind.

(b) Überprüfen Sie, ob die quadratischen Formen $2x_1x_2$ und $x_1^2+x_2^2$ auf dem Vektorraum $(\mathbb{F}_5)^2$ äquivalent sind.

Hinweis. Lesen Sie Lemma 4.2.4 des Kurzskripts.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Quadrik [7+2 P.]

$$\mathbf{F}_4 := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4\}.$$

Im Abschnitt 4.1 ist erklärt, dass eine orthogonale Matrix $C \in \mathcal{O}_3$ und Zahlen $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ existieren, so dass gilt:

$$\mathbf{F}_4 = C \cdot \{Y \in \mathbb{R}^3 \mid d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + d_3y_3^2 = 4\}.$$

Finden Sie diese C und d_1, d_2, d_3. Skizzieren Sie die Menge $\mathbf{F}_4$ bezüglich der neuen Hauptachsen – Spalten von C.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 4. Sei [8+4 P.]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie, dass die symmetrische Matrix A positiv definit ist. Finden Sie eine unipotente Matrix $U \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{R})$ und eine positiv definite Diagonalmatrix $D \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{R})$, so dass gilt:

$$U^t A U = D.$$

(b) Finden Sie die Cholesky-Zerlegung $A = G^t G$, wobei G eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalanträgen ist.

Hinweis. (a) Den Beweis zu Lemma 3.7.5 finden Sie im Kurzskript. Folgen Sie ihm.
(b) Folgen Sie dem Beweis von Satz 3.7.7 im Kurzskript.