Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe 4.05. Besprechung: 10.05 und 11.05

# Lineare Algebra II
## Übungsblatt 3

Die Theorie zu Aufgabe 3 wird in der Vorlesung am Montag erklärt.

**Aufgabe 1.** Seien $U, V, W$ drei endlichdimensionale $K$-Vektorräume ($K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit Skalarprodukten. Beweisen Sie, dass für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, alle $\theta \in \mathrm{Hom}(U, V)$ und alle $c \in K$ gelten [3+3+2P.]

(a) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$, (b) $(c\varphi)^* = \bar{c}\varphi^*$, (c) $(\varphi \circ \theta)^* = \theta^* \circ \varphi^*$.

**Aufgabe 2.** Seien [8 P.]

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} i+1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ durch $\varphi(v_i) = u_i$, $i = 1, 2, 3$.
Geben Sie die adjungierte Abbildung $\varphi^* : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ in der Standardbasis von $\mathbb{C}^2$ an.

*Hinweis.* Die Basen $(v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{C}^3$ und $(u_1, u_2)$ von $\mathbb{C}^2$ sind jeweis keine Orthonormalbasen. Deswegen darf man den Satz 3.2.1 (b) ohne Weiteres nicht anwenden.

**Aufgabe 3.** [8 P.]
Für die Hermitesche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

finden Sie eine unitäre Matrix $C$ und eine Diagonalmatrix $B$, so dass gilt

$$B = \overline{C^t} A C.$$

**Aufgabe 4.** Auf $\mathbb{C}^n$ betrachten wir die Standardnorm $||X|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |X_i|^2}$. [2+3+3P.]

Für eine Matrix $A \in M(n, n, \mathbb{C})$ definieren wir

$$||A||_m := \max_{i,j} |A_{ij}| \qquad \text{und} \qquad ||A||' := \sup_{0 \neq X \in \mathbb{C}^n} \frac{||A \cdot X||}{||X||}.$$

Aus dem Satz 3.3.3 folgt, dass $||\cdot||'$ eine Algebrennorm auf $M(n, n, \mathbb{C})$ ist.

(a) Beweisen Sie, dass $||\cdot||_m$ eine Vektorraumnorm aber keine Algebrennorm auf $M(n, n, \mathbb{C})$ ist.

(b) Berechnen Sie $||A||'$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Berechnen Sie $||B||'$ für $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Fortsetzung Seite 2.**

**Aufgabe 5.** Sei $V$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Seien $\varphi$ und $\psi$ zwei Endomorphismen von $V$ mit der Eigenschaft [4+4 P.]

$$\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi.$$

Beweisen Sie:

(a) Jeder Eigenraum $U$ von $\varphi$ ist $\psi$-invariant, d.h. $\psi(U) \subseteq U$.

(b) Sind beide Endomorphismen $\varphi$ und $\psi$ unitär, dann besitzt der Vektorraum $V$ eine Basis, die aus Vektoren besteht, die gleichzeitig Eigenvektoren von $\varphi$ und $\psi$ sind.